

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 26.01.2012, 10:00

Aufgabe 53: Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{[1,2] \times [1,2]} e^{x+y} d(x, y) \quad \text{und} \quad \int_{[1,2] \times [2,3] \times [0,2]} \frac{2z}{x^2 + 2xy + y^2} d(x, y, z).$$

Aufgabe 54: Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b > 0$ setzen wir $N(x) = \frac{b}{\text{ggT}(a,b)}$, d.h. $N(x)$ ist der Nenner von x in gekürzter Form und wir setzen $N(0) = 1$. Untersuche die Funktionen

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{N(x)}, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$g : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } N(x) = N(y), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezüglich ihrer Integrierbarkeit auf $[0, 1] \times [0, 1]$ und bestimme ggf. den Wert des Integrals über diesem Quader.

Aufgabe 55:

- a. Zeige, sind $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $f \cdot g$ auf $[a, b] \times [a, b]$ integrierbar und

$$\int_{[a,b] \times [a,b]} f(x) \cdot g(y) d(x, y) = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(y) dy.$$

- b. Es seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei stetig auf $[a, b]$ mit $\int_{[a,b]} f(x) dx = 0$. Zeige, dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Aufgabe 56: Sei Q ein Quader in \mathbb{R}^n , $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : Q \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar auf Q . Zeige, es gibt ein $c \in Q$ mit

$$\int_Q f(x) \cdot g(x) dx = f(c) \cdot \int_Q g(x) dx.$$