Fachbereich Mathematik Wintersemester 2011/12, Blatt 15
Thomas Markwig Stefan Steidel

Grundlagen der Mathematik 2

Die Lösungen zu den Aufgaben brauchen nicht abgegeben zu werden und werden auch nicht korrigiert. Fragen zu den Aufgaben können in den Übungen oder Tutorien der letzten Vorlesungswoche gestellt werden.

Aufgabe 57:

a. Zeige, daß jede Hyperebene eine Nullmenge ist.

b. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmengen, dann ist auch der Abschluß $\overline{B}$ eine Jordan-Nullmenge.

c. Zeige, daß jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 58:

a. Zeige, daß die folgenden Menge ein Normalbereich bezüglich (x_1, x_2) und (x_2, x_1) ist:

$$B_1 = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq x_1\}.$$

b. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $x_2 = x_1$ und der Parabel $x_2 = x_1^2$. Berechne $\int_B x_1 x_2 \, d(x_1, x_2)$.

c. Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene $x_3 = 2 - 2x_1 - x_2$ begrenzt wird.

Aufgabe 59: [Das Prinzip von Cavalieri]

Sei $B \subseteq [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-meßbar und für jedes $t \in [a_1, b_1]$ sei der Hyperebenenschnitt $H_t = B \cap V(x_1 - t)$ Jordan-meßbar mit Volumen $v(t)$. Zeige zunächst

$$V(B) = \int_{a_1}^{b_1} v(t)\ dt,$$

und zeige für kompaktes B und stetiges $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ zudem

$$\int_B f(x)\ dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{H_t} f(t, y)\ dy\ dt.$$

Aufgabe 60: Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus, $a \in \mathbb{R}^3$ und $\overline{U_r(a)}$ bezeichne den Würfel um a mit Kantenlänge $2r$. Zeige

$$\lim_{r \to 0} \frac{V(f(\overline{U_r(a)}))}{8 \cdot r^3} = |\det Df(a)|.$$