Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 2

Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 29/10/2015, 10:00

Aufgabe 5:

a. Berechne die Determinate der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

b. Berechne die Determinate der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & \mu \\ \mu & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \mu & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und bestimme die Werte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, für die die Matrix invertierbar ist.

Aufgabe 6: Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

a. Zeige, ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $A^t = -A$, so ist A nicht invertierbar.

b. Finde für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Gegenbeispiel zur Aussage in a., falls $\mathrm{char}(K) = 2$.

Aufgabe 7: Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a. Zeige, ist $U \leq V$ ein f-invarianter Unterraum, so gilt $\det(f) = \det(f_U) \cdot \det(f_{V/U})$.

b. Zeige, sind $U_1, \ldots, U_k \leq V$ f-invariante Unterräume mit $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, so gilt

$$\det(f) = \det(f_{U_1}) \cdot \ldots \cdot \det(f_{U_k}).$$

Aufgabe 8: Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ $\mathbb{C}$-linear. Mittels Einschränkung der Skalarmultiplikation können wir V als $\mathbb{R}$-Vektorraum und f als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auffassen. Des Weiteren bezeichnen wir mit $\det_{\mathbb{C}}(f)$ die Determinante von f als $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und $\det_{\mathbb{R}}(f)$ die Determinante von f als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Zeige: $\det_{\mathbb{R}}(f) = |\det_{\mathbb{C}}(f)|^2$.

HINWEIS: Für eine $\mathbb{C}$-Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V betrachte man die zugehörige $\mathbb{R}$-Basis $(v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n)$ sowie jeweils die zugehörige Matrixdarstellung von f. Wem der allgemeine Fall zu schwer ist, der beschränke sich auf die Abbildung $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \longmapsto (a + ib) \cdot z$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Was ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum?