Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 3
Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 05/11/2015, 10:00

Aufgabe 9:

a. Zerlege das Polynom $t^4 - 4t^3 - 3t^2 - 8t - 10 \in \mathbb{R}[t]$ in Primfaktoren.

b. Bestimme das Minimalpolynom von $b = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

c. Zeige, ist $f \in \mathbb{R}[t]$ irreduzibel, so ist $\deg(f) \in \{1, 2\}$.

Hinweis zu Teil c., betrachte für eine komplexe Nullstelle λ von f die Fälle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. In letzterem Fall zeige, daß auch das konjugiert Komplexe von λ eine Nullstelle von f ist und betrachte dann das Polynom $g = (t - \lambda) \cdot (t - \overline{\lambda})$.

Aufgabe 10: Es sei $1 \leq \dim_K(V) < \infty$, $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_U} \cdot \chi_{f_{V/U}}.$$

b. Ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, wobei die U_i f-invariant seien, dann gilt:

$$\chi_f = \chi_{f_{U_1}} \cdot \ldots \cdot \chi_{f_{U_k}}.$$

Aufgabe 11: Zeige, ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f^r = 0$ für ein $r \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \dim_K(V) < \infty$, so gilt $\mathrm{Spur}(f) = 0$.

Hinweis: Führe Induktion über $n = \dim_K(V)$. Dazu zeige man, daß $M_B^B(f)$ für eine geeignete Wahl von B Blockgestalt mit einem Nullblock in der oberen linken Ecke hat. Aufgabe 7 mit $U = \mathrm{Ker}(f)$ ist dabei hilfreich.

Aufgabe 12:

a. Es sei $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der K-Vektorraum der 2×2-Matrizen über K. Ferner sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ gegeben und wir betrachten den Endomorphismus

$$T_A : V \longrightarrow V : X \mapsto A \circ X.$$

(1) Zeige, genau dann ist $\det(A) \neq 0$, wenn $\det(T_A) \neq 0$.

(2) Zeige, $\mathrm{Spur}(T_A) = 2 \cdot \mathrm{Spur}(A)$.

b. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

und überprüfe A auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.