Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2015/16, Blatt 4
Thomas Markwig — Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 12/11/2015, 10:00

Aufgabe 13:

a. Zeige, daß die Matrix A trigonalisierbar ist und bestimme eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{F}_5)$, die sie trigonalisiert, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_5).$$

b. Es sei $E = (e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^n$, $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n) \in \mathbb{S}_n$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeige, daß f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 14:

a. Zeige, genau dann ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ diagonalisierbar, wenn A^t diagonalisierbar ist.

b. Zeige, ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, so daß jeder Vektor $0 \neq x \in V$ ein Eigenvektor von f ist, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda \cdot \mathrm{id}$.

Aufgabe 15: Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $m \in \mathbb{N}$ der Nilpotenzindex von f.

a. Zeige, $V = \mathrm{Im}(f^0) \supsetneqq \mathrm{Im}(f^1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq \mathrm{Im}(f^m) = \mathrm{Im}(f^k)$ für $k \geq m$.

b. Zeige, $V = \mathrm{Im}(f^m) \oplus \ker(f^m)$.

Aufgabe 16: Es sei $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ eine Matrix vom Rang $\mathrm{rang}(A) = 1$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a. t^2 ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_A von A.

b. A ist diagonalisierbar.

c. $\mathrm{Spur}(A)$ ist ein Eigenwert von A.