Fachbereich Mathematik Wintersemester 2015/16, Blatt 5
Thomas Markwig Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 19/11/2015, 10:00

Aufgabe 17:

a. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{Q}).$$

b. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

c. Es sei $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis von $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{11})$ und $C = 2 \cdot E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_{11})$. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Jordanbasis für den Endomorphismus $f : V \to V : A \mapsto C \circ A + A \circ C$.

Aufgabe 18:

a. Welche Jordansche Normalform kommt für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ in Frage, wenn $A^4 + 12A^2 = 6A^3 + 8A$ und $\mathrm{rang}(A) = 2 \cdot \mathrm{rang}(A - 2 \cdot \mathbb{1}_4) = 4$?

b. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum P_n der Polynome vom Grad höchstens n sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : P_n \longrightarrow P_n : p \mapsto p(t+1)$ und bestimme deren Jordansche Normalform.

Aufgabe 19: Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$ und $\dim_K(V) = n \geq 1$.

a. Bestimme den Rang und die Eigenwerte von f.

b. Bestimme das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von f.

c. Bestimme die Jordansche Normalform von f.

Aufgabe 20: Zeige, ist $0 \neq f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein nilpotenter Endomorphismus, so besitzt $\mathrm{Eig}(f, 0)$ kein f-invariantes direktes Komplement.