Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2015/16, Blatt 6
Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 26/11/2015, 10:00

Aufgabe 21: Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_5(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang von A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22:

a. Es sei $b : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q} : \big((x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t\big) \mapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot y_2$. Ferner bezeichne $E = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{Q}^2$ und $B = (x_1, x_2)$ mit $x_1 = (1, 1)^t$ und $x_2 = (1, -1)^t$ sei eine weitere Basis.
Zeige, daß b eine symmetrische Bilinearform ist und berechne die Matrixdarstellungen $M_E(b)$ und $M_B(b)$ sowie die Transformationsmatrix T_E^B mit

$$M_B(b) = \left(T_E^B\right)^t \cdot M_E(b) \cdot T_E^B.$$

b. Zeige, daß durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ definiert wird.

Aufgabe 23: Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$.

a. Zeige, es gibt eine symmetrische Bilinearform $b' \in \mathrm{Bil}_K(V)$ und eine schiefsymmetrische Bilinearform $b'' \in \mathrm{Bil}_K(V)$, so daß $b = b' + b''$.

b. Zeige, die Bilinearformen b' und b'' in a. sind eindeutig bestimmt.

c. Gelten die Aussagen in a. und b. auch noch, wenn $\mathrm{char}(K) = 2$?

Anmerkung, b heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $b(x, y) = -b(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

Aufgabe 24: Für $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ definieren wir $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}\left(A^t \circ B\right)$.

a. Zeige, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V.

b. Zeige, für $U = \{A \in V \mid A^t = A\}$ gilt $U^\perp = \{A \in V \mid A^t = -A\}$.