Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 7

Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 03.12.2015, 10:00

Aufgabe 25: Bestimme mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des Unterraums

$$U = \operatorname{Lin}\big((-3,-3,3,3)^t, (-5,-5,7,7)^t, (4,-2,0,6)^t\big) \leq \mathbb{R}^4$$

bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 26: Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum, $U \leq V$ und π_U die orthogonale Projektion auf U.

a. Zeige, $(U^\perp)^\perp = U$.

b. Zeige, ist $(x_1, \ldots, x_r)$ eine ONB von U, dann gilt $\pi_U(x) = \sum_{i=1}^r \langle x_i, x\rangle \cdot x_i$.

Aufgabe 27: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum.

a. Ist $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ normal, so gelten $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^*)$ und $V = \operatorname{Ker}(f) \perp \operatorname{Im}(f)$.

b. Für jedes $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ gibt es genau ein $y \in V$ mit $g(x) = \langle y, x\rangle$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 28:

a. Zeige, daß $\mathcal{B}(M, \mathbb{R}) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$ für jede Menge M ein Unterraum von $\mathbb{R}^M$ ist.

b. Zeige, ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und auf $[x,y]$ integrierbar für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

c. Zeige, daß auf $V = \mathcal{B}\big((-1,1), \mathbb{R}\big) \cap \mathcal{C}\big((-1,1), \mathbb{R}\big)$ durch

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : (f,g) \mapsto \langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

d. Berechne eine Orthonormalbasis des Unterraumes $U = \big\{f : (-1,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\big\}$ von V bezüglich des Skalarproduktes aus Teil c.

Hinweis, in Teil c. substitutiere man $x = \sin(t)$, um die Konvergenz des uneigentlichen Integrals zu zeigen.