Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 8

Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 10.12.2015, 10:00

Aufgabe 29:

a. Bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, die die folgende symmetrische Matrix A diagonalisiert:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix A positiv definit?

b. Berechne für die Matrix

$$T = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in U(4)$$

eine unitäre Matrix S, so daß $S^* \circ T \circ S$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 30: Es sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ so, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^m = \mathrm{id}_V$. Zeige, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a. f ist unitär.

b. f ist normal.

c. Für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ von f gilt $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \perp \mathrm{Eig}(f, \mu)$.

Aufgabe 31: Es sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\langle f(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in V$. Zeige, dann ist f die Nullabbildung.

Aufgabe 32: Es sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeige, die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

a. $f^* = -f$.

b. Für alle $x \in V$ gilt: $\langle f(x), x \rangle \in i\mathbb{R}$.

c. Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f und der Realteil aller Eigenwerte ist Null.