Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2015/16, Blatt 9
Thomas Markwig | Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 17.12.2015, 10:00

Aufgabe 33:

a. Es sei $M = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen und für $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ sei

$$d(A,B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Zeige, d ist eine Metrik auf M.

b. Zeige, eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $A_n = (a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn alle Komponentenfolgen $(a_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 34:

a. Identifizieren wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ der $m \times n$-Matrizen mit $\mathbb{R}^{m\times n}$, so wird die euklidische Norm definiert durch

$$\|(a_{ij})\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Zeige, für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \cdot \|x\|_2.$$

b. Überprüfe, welche der folgenden Mengen A offen, abgeschlossen und / oder kompakt in M ist? Was ist der Rand von A?

$$(1)\ A = \{(x,y)^t \mid x^2 < y\}, M = \mathbb{R}^2 \quad (2)\ A = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, M = \mathbb{R}.$$

Wir betrachten hier M jeweils mit der euklidischen Norm als normierten Raum.

Aufgabe 35: Sei M ein metrischer Raum, $A \subseteq U \subseteq M$. Zeige folgende Aussagen:

a. $\overline{U} = \mathring{U} \cup \partial U$.

b. ∂U ist abgeschlossen in M.

c. Ist A abgeschlossen und U offen, so ist $U \setminus A$ offen.

d. Der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen ist wieder kompakt.

Aufgabe 36: Betrachte $U \subseteq M$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von M.

a. $X \subseteq U$ ist offen in $U \iff \exists\, O$ offen in M mit $X = U \cap O$.

b. $X \subseteq U$ ist abgeschlossen in $U \iff \exists\, A$ abgeschlossen in M mit $X = U \cap A$.

Man nennt die Menge X dann auch *relativ* offen oder abgeschlossen in M.

Internationale Mathe-Weihnachtsfeier
am Donnerstag, 17. Dezember ab 19 Uhr im KOM-Raum und drumherum!

Es erwarten euch Weihnachtsleckereien wie kostenlose Waffeln, Plätzchen und frischen Glühwein, außerdem gibt es herzhaftes Chili con und sin carne! Als Höhepunkt des Abends erwartet euch ein Krippenspiel.

Euer Fachschaftsrat freut sich auf euer Kommen!