Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2015/16, Blatt 10
Thomas Markwig | Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 07.01.2016, 10:00

Aufgabe 37:

a. Zeige, ist M ein kompakter metrischer Raum, so ist M vollständig.

b. Es seien (M, d) ein metrischer Raum, $A \subseteq M$ kompakt und $x \in M$. Begründe, weshalb das Minimum

$$d(x, A) := \min\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

existiert und zeige, $d(x, A) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$.

Aufgabe 38:

a. Wir betrachten den Unterraum $V = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$ von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ als normierten Raum mit der euklidischen Norm aus Aufgabe 34. Zeige, daß die Menge $I = \{A \in V \mid A \text{ ist indefinit}\}$ in V offen ist.

b. Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist

$$||f_A|| = \max\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\right\}$$

die Operatornorm von $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 39: Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y)^t \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeige, dass f im Nullpunkt das Folgenkriterium für Stetigkeit für jede Folge erfüllt, die sich auf einer Geraden dem Nullpunkt nähert. Ist f in $(0, 0)$ stetig?

Aufgabe 40:

a. Zeige, der Integraloperator $I : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(x)\, dx$ ist bezüglich der Maximumsnorm auf $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ gleichmäßig stetig.

b. Zeige, der Differentialoperator $D : \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : f \longmapsto f'$ ist ein linearer Operator, der bezüglich der Maximumsnorm auf beiden Räumen *nicht* stetig ist.