Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 11
Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 14.01.2016, 12:00

Aufgabe 41:

a. Wie versehen $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit der Operatornorm

$$||\cdot|| : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \sup_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}.$$

(1) Zeige, für $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gilt stets $||A \circ B|| \leq ||A|| \cdot ||B||$.

(2) Zeige, $T \in \mathrm{Gl}_n(R)$ definiert eine Lipschitz-stetige Abbildung

$$f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : A \mapsto T \circ A \circ T^{-1}.$$

b. Zeige, der Vektorraum $V = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Abbildungen ist bzgl. der euklidischen L_2-Norm aus Beispiel 39.5 *nicht* vollständig.

Aufgabe 42:

a. Begründe, weshalb die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \vartheta) \mapsto \big(r \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)\big)$$

total differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ ist und berechne die Ableitung $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$.
Für welche $(r, \theta, \vartheta)^t \in \mathbb{R}^3$ ist die Matrix $D\varphi(r, \theta, \vartheta)$ invertierbar?

b. Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^t \circ A \circ x$ total differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und berechne die Ableitung.

c. Zeige, die folgende Funktion ist total, aber nicht stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} ||x||_2^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{||x||_2}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 43: Zeige, sind $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ mit $g \circ f$ konstant und $Dg(y) \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, so ist $\det(Df(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 44: Zeige, ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine in $(0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, so ist f $\mathbb{R}$-linear.