Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 12

Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 21.01.2016, 12:00

Aufgabe 41:

a. Zeige, für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } (x_1, x_2)^t \neq (0,0)^t, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

existieren die beiden partiellen Ableitungen $D_1 D_2 f(0,0)$ und $D_2 D_1 f(0,0)$, stimmen aber nicht überein.

b. Bestimme alle $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\nabla f(x,y) = (2x \cdot \sin(y), 2y \cdot \cos(x))^t$.

Aufgabe 42:

a. Bestimme das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,a}$ im Entwicklungspunkt $a = (0, \pi)^t$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \cos(y) \cdot \sin(x) - 2y \cdot (x^2 + \sin(x) - 1).$$

b. Bestimme das fünfte Taylor-Polynom $T^5_{f,a}$ für $a = (0,0,0)^t$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z)^t \longmapsto \frac{x+y}{1-z^2} \cdot \ln(xy+1).$$

Aufgabe 43:

a. Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$ und $f : U_\epsilon(a) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U_\epsilon(a)$. Zeige, dass f konstant ist.

b. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei zweifach stetig differenzierbar und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ sei positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Zeige, f hat höchstens einen kritischen Punkt.

Aufgabe 44:

a. Bestimme alle lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y)^t \longmapsto x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^3 - 2xy^2 + x^2 + y^2.$$

b. Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y)^t \longmapsto (y - x^2) \cdot (y - 2x^2)$ keine Extremstelle hat, dass aber für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch $(0,0)^t$ die Funktion $f_{|G}$ ein isoliertes lokales Minimum in $(0,0)^t$ besitzt.