Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 13

Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 28.01.2016, 12:00

Aufgabe 49:

a. Zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die rekursiv definierte Folge $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ für jeden Startwert $a_0 \in [0,\infty)$ konvergiert und dass der Grenzwert nicht vom Startwert abhängt.

b. Zeige, dass die Abbildung $\varphi : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ genau einen Fixpunkt besitzt, wobei $\varphi(g) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\cos(x\cdot g(t))}{2}\, dt$.

Aufgabe 50:

a. Zeige, dass die Verschwindungsmenge $V(f)$ für

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x_1,x_2,y_1,y_2)^t \mapsto \left(x_1^2+x_2^2-2y_1y_2, x_1^3+x_2^3+y_1^3-y_2^3\right)^t$$

lokal in $(-1,1,1,1)$ als Graph einer Abbildung $\varphi : U_\varepsilon(-1,1) \longrightarrow U_r(1,1)$ darstellbar ist und berechne $D\varphi(-1,1)$.

b. Es seien $f,g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $f'(0) \neq 0 = f(0)$. Zeige, dass die Gleichung $f(y) = x\cdot g(y)$ lokal in $(x,y)^t = (0,0)^t$ nach y aufgelöst werden kann als $y = \varphi(x)$ und bestimme die Ableitung der Funktion φ in 0.

Aufgabe 51:

a. Überprüfe, ob die Abbildung $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : X \mapsto X^2$ in den folgenden Punkten lokal invertierbar ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig auf $\overline{U}$ und stetig differenzierbar auf U. Ferner sei $y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $f^{-1}(y) \subseteq U$ und $\det\left(Df(x)\right) \neq 0$ für alle $x \in f^{-1}(y)$. Zeige, dass $f^{-1}(y)$ nur endlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 52: (Kugelkoordinaten)

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (r,\theta,\vartheta)^t \mapsto \left(r\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\vartheta), r\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\vartheta), r\cdot\sin(\vartheta)\right)^t$$

auf der offenen Menge

$$U = (0,\infty)\times(0,2\pi)\times\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)$$

ein Diffeomorphismus ist mit Funktionaldeterminante

$$\det(D\varphi(r,\theta,\vartheta)) = r^2\cdot\cos(\vartheta) > 0.$$