Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2015/16, Blatt 14

Isabel Stenger

# Grundlagen der Mathematik 2

Abgabetermin: Donnerstag, 04.02.2016, 12:00

**Aufgabe 53:**

a. Berechne das globale Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||x||_2 \leq 1\right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x_1 \cdot x_2 + 1.$$

b. Bestimme mit Hilfe des Verfahrens der Lagrange Multiplikatoren eine Matrix $X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $\det(X) = 0$, deren Abstand zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in der euklidischen Norm minimal ist.

**Aufgabe 54:** Für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b > 0$ setzen wir $N(x) = \frac{b}{\mathrm{ggt}(a,b)}$, d.h. $N(x)$ ist der Nenner von $x$ in gekürzter Form und wir setzen $N(0) = 1$. Untersuche die Funktionen

$$f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \begin{cases} \frac{1}{N(x)}, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$g : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y)^t \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x, y \in \mathbb{Q} \text{ mit } N(x) = N(y), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezüglich ihrer Integrierbarkeit auf $[0,1] \times [0,1]$ und bestimme ggf. den Wert des Integrals über diesem Quader.

**Aufgabe 55:**

a. Zeige, sind $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ integrierbar, so ist $f \cdot g$ auf $[a,b] \times [a,b]$ integrierbar und

$$\int_{[a,b]\times[a,b]} f(x) \cdot g(y) \; d(x,y) = \int_a^b f(x) \; dx \cdot \int_a^b g(y) \; dy.$$

b. Sei $Q$ ein Quader in $\mathbb{R}^n$, $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : Q \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar auf $Q$. Zeige, es gibt ein $c \in Q$ mit

$$\int_Q f(x) \cdot g(x) \; dx = f(c) \cdot \int_Q g(x) \; dx.$$

**Aufgabe 56:** Berechne das Integral

$$\int_{[1,2]\times[2,3]\times[0,2]} \frac{2z}{x^2 + 2xy + y^2} \; d(x,y,z).$$