Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2015/16, Blatt 15
Isabel Stenger

Grundlagen der Mathematik 2

Die Lösungen zu den Aufgaben brauchen nicht abgegeben zu werden und werden auch nicht korrigiert. Fragen zu den Aufgaben können in den Übungen oder Tutorien der letzten Vorlesungswoche gestellt werden.

Aufgabe 57: Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien fast überall gleich, d.h. es gibt eine Nullmenge N, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a, b] \setminus N$.

(1) Ist N kompakt und f auf $[a, b]$ integrierbar, so ist auch g auf $[a, b]$ integrierbar.

(2) Sind f und g auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} g(x)\, dx.$$

Aufgabe 58:

a. Zeige, dass jede Hyperebene eine Nullmenge ist.

b. Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmengen, dann ist auch der Abschluss $\overline{B}$ eine Jordan-Nullmenge.

c. Zeige, dass jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 59:

(a) Zeige, dass die folgenden Mengen Normalbereiche bezüglich (x_1, x_2) und (x_2, x_1) sind.

  (1) $B_1 = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq x_1\}$.

  (2) $B_2 = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq \sin(x_2),\ 0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}\}$.

(b) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ der Normalbereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $x_2 = x_1$ und der Parabel $x_2 = x_1^2$. Berechne $\int_B x_1 x_2\, d(x_1, x_2)$.

(c) Berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenachsen und der Ebene $x_3 = 2 - 2x_1 - x_2$ begrenzt wird.

Aufgabe 60: Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus, $a \in \mathbb{R}^3$ und $\overline{U_r(a)}$ bezeichne den Würfel um a mit Kantenlänge $2r$. Zeige

$$\lim_{r \to 0} \frac{V(f(\overline{U_r(a)}))}{8 \cdot r^3} = |\det Df(a)|.$$