Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Isabel Stenger

# Grundlagen der Mathematik 2

Die Aufgaben dieses Blattes dienen zur Wiederholung des Stoffes der ersten Semesterhälfe und sind ohne Abgabe. Ausgearbeitete Lösungen werden wir für diese nicht zur Verfügung stellen.

**Aufgabe 1:** Sei $K$ ein Körper.

(a) Begründe, weshalb die Mengen $U := \{(a_1, \ldots, a_n)^t \in K^n \mid a_1 = \ldots = a_n\}$ und $U' := \left\{(a_1, \ldots, a_n)^t \in K^n \;\middle|\; a_1 + \ldots + a_n = 0\right\}$ Unterräume des $K^n$ sind.

(b) Bestimme $\dim_K(U)$, $\dim_K(U')$, $\dim_K(U \cap U')$ und $\dim_K(U + U')$.

**Aufgabe 2:** Sei $K$ ein Körper und $\lambda \in K$. Bestimme die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-1} & 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-2} & \lambda^{n-1} & 1 & \ldots & \lambda^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K).$$

**Aufgabe 3:** Es sei $K$ ein Körper, $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definiere

$$A_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K).$$

Leite eine Rekursionsformel für $d_{n,\lambda} = \det\left(A_{n,\lambda}\right)$ her und zeige, $d_{2+3k,1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 4:**

a. Es sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit ungeradem $n$ und $A^t = -A$. Zeige, $A$ ist nicht invertierbar. Bleibt die Aussage wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen anderen Körper ersetzen?

b. Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, so ist auch $A^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix.

c. Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$x + 2z = 3, \quad 3x + y = 5 \quad \text{und} \quad -x + y = 1.$$

**Aufgabe 5:** Es seien $b_0, \dots, b_n \in K$ paarweise verschieden und $c_0, \dots, c_n \in K$ beliebig. Zeige, es gibt genau ein Polynom $f \in K[t]$ vom Grad $\deg(f) \leq n$ mit $f(b_i) = c_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.

**Aufgabe 6:** Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $x \in V$.

a. Zeige, daß die Menge $I_{f,x} := \{p \in K[t] \mid p(f)(x) = 0\} \neq \emptyset$ ein Ideal in $K[t]$ ist, d.h. für $p, q \in I_{f,x}$ und $r \in K[t]$ gilt $p + q, r \cdot p \in I_{f,x}$.

b. Zeige, daß $U_{f,x} := \{p(f)(x) \mid p \in K[t]\}$ ein Unterraum von $V$ ist.

c. Zeige, ist $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $f^m(x) = 0$, so gilt

$$I_{f,x} = \{t^m \cdot p \mid p \in K[t]\}$$

und

$$U_{f,x} = \mathrm{Lin}\left(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \dots, f(x), x\right).$$

Anmerkung: in Teil c. darf man ohne Beweis verwenden, daß jedes Ideal $I$ in $K[t]$ von einem geeigneten Element $q$ erzeugt werden kann, also von der Form $I = \{q \cdot p \mid p \in K[t]\}$ ist.

**Aufgabe 7:**

a. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und überprüfe $A$ auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

b. Es sei $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis von $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{11})$ und $T = E_{12} + E_{21} + E_{22} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_{11})$. Prüfe den Endomorphismus $f : V \to V : A \mapsto T \circ A + A \circ T^{-1}$ auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

**Aufgabe 8:** Es sei $1 \leq \dim_K(V) < \infty$.

a. Sind $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, so gilt $\sigma(f \circ g) = \sigma(g \circ f)$.

b. Sind $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$ und $\lambda \in K$, so ist $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ $g$-invariant.

**Aufgabe 9:**

a. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_5(\mathbb{F}_5)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{F}_5).$$

b. Bestimme mit Hilfe von SINGULAR eine Basis $B$ von $\mathbb{Q}^4$, bezüglich derer die Matrixdarstellung der Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ Jordansche Normalform hat, wo:

$$f(w, x, y, z) = (w + x + y + z, 2w + 4x + 5y + 5z, -4w - 6x - 7y - 6z, 2w + 3x + 3y + 2z)^t.$$

**Aufgabe 10:** Es sei $A \in \mathrm{Mat}(5, K)$ mit $\chi_A = t(t-1)^4$, $\mu_A = t(t-1)^2$ und $\mathrm{rang}(A-1_5) = 2$. Bestimme die Jordansche Normalform von $A$.

**Aufgabe 11:** Zeige mit Hilfe der Jordanschen Normalform, daß für ein normiertes Polynom $p \in \mathbb{C}[t] \setminus \mathbb{C}$ die folgenden Aussagen gleichwertig sind:

a. Je zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ mit $\mu_A = \mu_B = p$ sind konjugiert.

b. $\deg(p) = 1$, $\deg(p) = n$ oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p = (t-\lambda)^{n-1}$.

**Aufgabe 12:**

a. Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ so, daß $\chi_A$ über $K$ in Linearfaktoren zerfällt, so sind $A$ und $A^t$ konjugiert.

b. Gilt die Aussage in b. auch noch ohne die Voraussetzung, daß $\chi_A$ zerfällt?

**Aufgabe 13:** Zeige, ist $1 \leq \dim_K(V) = n < \infty$, so sind für $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ die folgenden beiden Aussagen gleichwertig:

a. $\mathcal{A}$ ist simultan diagonalisierbar, d. h. es gibt eine Basis $B$ von $V$, so daß für alle $f \in \mathcal{A}$ gilt $M_B^B(f)$ ist eine Diagonalmatrix.

b. Für alle $f \in \mathcal{A}$ gilt, $f$ ist diagonalisierbar, und für alle $f, g \in \mathcal{A}$ gilt, $f \circ g = g \circ f$.

Hinweis: Führe für "b. $\Rightarrow$ a." Induktion über $n$ und zerlege dazu $V$ in zwei invariante Unterräume kleinerer Dimension.

**Aufgabe 14:**
Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang von $A$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 15:**

a. Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $U = \{(v, w, x, y, z)^t \in \mathbb{R}^5 \mid v + w + x + y + z = 0\}$ bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$.

b. Zeige, für $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es genau dann zwei normierte Vektoren $x = (u, v, a)^t \in \mathbb{R}^3$ und $y = (r, s, b)^t \in \mathbb{R}^3$ die bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonal zueinander sind, wenn $a^2 + b^2 \leq 1$.

**Aufgabe 16:** Zeige, durch $\left\langle (x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t \right\rangle := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$ für $(x_1, x_2, x_3)^t, (y_1, y_2, y_3)^t \in \mathbb{R}^3$ wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert und bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich dieses Skalarproduktes.

**Aufgabe 17:** Ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal, so gibt es ein $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $f^* = p(f)$.

**Aufgabe 18:**

a. Sei $V$ ein euklidischer oder unitärer Raum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ die durch das Skalarprodukt definierte Norm. Zeige, für $x, y \in V$ gelten:

   (a) Die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

   (b) Der Satz des Pythagoras': $x \perp y \implies \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$.

b. Überprüfe, ob die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ positiv definit ist:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 19:** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ bijektiv. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

a. Für $x, y \in V$ mit $x \perp y$ gilt $f(x) \perp f(y)$.

b. Für $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$ gilt $\|f(x)\| = \|f(y)\|$.

c. Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein $g \in O(V)$ bzw. $g \in U(V)$ mit $f = \lambda g$.

**Aufgabe 20:**

a. Es sei $(M, d)$ ein metrischer Raum, $a \in M$ und

$$d' : M \times M \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto d'(x, y) = \begin{cases} d(x, a) + d(a, y), & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Zeige, $d'$ ist eine Metrik auf $M$.

b. Überprüfe, ob folgende Menge $A$ offen, abgeschlossen und / oder kompakt in $M$ ist? Was ist der Rand von $A$?

$$A = \left\{ \frac{1}{2^m} + \frac{1}{5^n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, M = \mathbb{R}.$$

Wir betrachten hier $M$ mit der euklidischen Norm als normierten Raum.

**Aufgabe 21:** Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^t\} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y)^t \mapsto \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

Zeige, $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$. Ist $f$ stetig in $(0,0)^t$ fortsetzbar?

**Aufgabe 22:**

a. Sei $f : (M, d) \longrightarrow (M', d')$ eine gleichmäßig stetige Abbildung metrischer Räume. Zeige, ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so auch $\big(f(a_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Gilt die Aussage in a. auch noch, wenn $f$ nur stetig ist?

c. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei gleichmäßig stetig und bijektiv. Zeige, ist $f^{-1}$ stetig, so ist $U = \mathbb{R}^n$.

Hinweis zu c.: wenn $U \neq \mathbb{R}^n$, so kann man zeigen, daß $U$ einen Häufungspunkt besitzt und diesen ausnutzen.