

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Donnerstag, 22.10.2026, 12:00

Die Präsenzaufgaben werden in der Übungsstunde bearbeitet. Ihre Lösungen brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 4: Bestimme die Menge $(h \circ g \circ f)^{-1}(B)$ für $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ und

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \mapsto (x, x - 2),$$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} (1, x \cdot y), & \text{wenn } x > y \\ (-1, x \cdot y), & \text{wenn } x \leq y, \end{cases}$$

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (z, x) \mapsto x^z.$$

Aufgabe 5: Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Formuliere die folgende Aussage zunächst in Quantorenschreibweise und beweise sie anschließend:

f ist genau dann injektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : X \longrightarrow M$ und $h : X \longrightarrow M$ mit $f \circ g = f \circ h$ folgt, dass $g = h$ ist.

Aufgabe 6: Es seien M eine Menge und $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M . Zeige, es gibt keine surjektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$.

Hinweis zu Teil (b): betrachte die Menge der $x \in M$ für die $x \notin f(x)$ gilt.

Aufgabe 7:

(a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $a^{2n+1} - a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Präsenzaufgabe 5: Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 3x - 2.$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : x \longmapsto 3x - 2.$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto 5x + 3y.$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto (y, x^2 + y).$

Präsenzaufgabe 6:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir definieren $a \sim b$ genau dann, wenn a und b die gleiche Quersumme haben. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es? (Diese Frage müsst Ihr zunächst sinnvoll deuten!)

(b) Seien $M = \mathbb{N}^2$ und $m = (a, b), m' = (a', b') \in M$. Wir definieren

$$m \sim m' :\Longleftrightarrow a + b' = a' + b.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist und dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow M / \sim, z \longmapsto \begin{cases} \overline{(z, 0)}, & z \geq 0 \\ \overline{(0, -z)}, & z < 0 \end{cases}.$$

Präsenzaufgabe 7: Beweise, dass die Menge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ zusammen mit der Verknüpfung $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ eine Gruppe definiert.