

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Donnerstag, 29.10.2026, 12:00

Die Präsenzaufgaben werden in der Übungsstunde bearbeitet. Ihre Lösungen brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 8: Sei M eine Menge und betrachte folgende beide Mengen von Abbildungen:

$$A := \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow M \text{ Abbildung}\} \text{ und } B := \{g \mid g : M \rightarrow \{0, 1\} \text{ Abbildung}\}.$$

Zeige:

- (a) A ist gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$.
- (b) B ist gleichmächtig zur Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.
- (c) Ist M abzählbar unendlich, so ist A abzählbar unendlich.
- (d) Ist M abzählbar unendlich, so ist B überabzählbar.

Aufgabe 9: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir definieren $a \sim b$ genau dann, wenn $a - b \in \mathbb{Z}$ ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist. Was ist die Äquivalenzklasse von 5?

Aufgabe 10: Sei M eine Menge und für $A, B \subseteq M$ definieren wir die symmetrische Differenz als

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- (a) Zeige, $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (b) Ist $\mathcal{P}(M)$ mit $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein Körper? Zeige alle Axiome, die erfüllt sind. Inwiefern hängt die Antwort von der Menge M ab?

Aufgabe 11: Beweise **eine** der beiden folgenden Gleichungen für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq n$ gilt $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

Hinweis: für die Aufgabe braucht man u.U. die Vorlesung vom 26.10.

Präsenzaufgabe 8: Es sei M eine Menge. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ein Relation durch

$$A \sim B \iff A \Delta B \text{ ist endlich.}$$

- (a) Zeige, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Bestimme für $M = \mathbb{N}$ die Äquivalenzklassen von $\mathbb{N}$ und $\emptyset$.
- (c) Überprüfe, ob die Mengen der geraden und der ungeraden Zahlen äquivalent zueinander sind.
- (d) Für welche Mengen M ist $\sim$ zugleich eine Ordnungsrelation.

Präsenzaufgabe 9:

- (a) Sei K ein angeordneter Körper, $x, y \in K$ mit $0 \leq x, y$ und $0 < n \in \mathbb{N}$. Zeige, genau dann gilt $x < y$, wenn $x^n < y^n$ gilt.
- (b) Sei K ein Körper und $x \in K$ mit $x^2 = 1$. Zeige, dann gilt $x \in \{-1, 1\}$.

Präsenzaufgabe 10:

- (a) Schreibe die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen:

(1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 1 \vee |x + 2| \leq 2\}.$

(2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| > 1 \wedge |x + 2| \leq 2\}.$

(3) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \leq 2 \vee \sqrt{|x - 10|} > 5\}.$

- (b) Überprüfe zudem jede der Mengen in Teil (a) sowie die folgende Menge, ob sie nach oben oder unten beschränkt ist, gib ggf. das Infimum oder Supremum der Menge an und überprüfe auch, ob es ein Minimum oder Maximum ist:

$$M = \left\{ \frac{m-n}{m+n} \mid 0 \neq m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$