

Grundlagen der Mathematik 1

Abgabetermin: Donnerstag, 05.11.2026, 12:00

Die Präsenzaufgaben werden in der Übungsstunde bearbeitet. Ihre Lösungen brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden.

Aufgabe 12:

- (a) Gib alle möglichen Ordnungsrelationen auf der 2-elementigen Menge $M = \{a, b\}$ als Teilmengen von $M \times M$ an. Begründe, weshalb dies alle sind.
- (b) Für zwei Punkte $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ in der euklidischen Ebene definieren wir

$$(a, b) \leq (c, d) :\Longleftrightarrow a \leq c \text{ und } b \leq d.$$

Zeige, dass $\leq$ eine Ordnungsrelation, aber keine Totalordnung ist, und bestimme in der Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

alle maximalen und alle minimalen Elemente.

Aufgabe 13: Für je drei reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|}.$$

Hinweis: man kann die Dreiecksungleichung des Betrags verwenden.

Aufgabe 14: Seien $M, N \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ nicht-leere, nach oben beschränkte Mengen und

$$M \cdot N := \{x \cdot y \mid x \in M, y \in N\}.$$

Zeige, dass $\sup(M \cdot N) = \sup(M) \cdot \sup(N)$.

Aufgabe 15:

- (a) Zeige, für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt die Parallelogrammgleichung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2 \cdot (|z|^2 + |w|^2).$$

Weshalb heißt die Gleichung Parallelogrammgleichung? Gib' eine geometrische Interpretation.

(b) Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\bar{z}$ und z^{-1} :

$$(i) \ z = 1 + 3i \quad (ii) \ z = \frac{4 - i}{8 + 2i} \quad (iii) \ z = \frac{(1 + i)^7}{(1 - i)^4}$$

(c) Bestimme die Polarkoordinaten von $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i$.

Präsenzaufgabe 11: Betrachte die Menge

$$M := \left\{ \frac{2mn}{m^2 + n^2} \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}, m \neq n \right\}.$$

Bestimme das Supremum und das Infimum von M .

Präsenzaufgabe 12: Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ sind monoton, beschränkt, konvergent oder bestimmt divergent?

(a) $a_n = 5$

(g) $a_n = -n$

(b) $a_n = \frac{1}{(-1)^n}$

(h) $a_n = n^2 - n$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(i) $a_n = 2^n$

(d) $a_n = \frac{3}{n}$

(j) $a_n = (-2)^n$

(e) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(k) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$.

(f) $a_n = \frac{n+1}{n}$

(l) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$ für $n \geq 1$.

Präsenzaufgabe 13: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \dots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

(b) Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .