

GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

KAPITEL I: Grundlegende Begriffsbildungen

§ 1 Etwas Logik

Definitionsversuch 1.1

Eine **Aussage** ist eine Äußerung, der eindeutig ein Wahrheitswert **wahr (w)** oder **falsch (f)** zugeordnet ist.

Beispiel 1.2:

- A: Dieser Satz enthält fünf Worte. Aussage: w
B: Der Bundespräsident ist stets mindestens 40. Aussage: w
C: Der Bundespräsident muß kein Deutscher sein. Aussage: f
D: Löse Aufgabe 2. keine Aussage

Definition 1.4 (Logische Operationen)

Es seien X und Y zwei Aussagen

- a) $\neg X$ "nicht X " (Negation)
- b) $X \wedge Y$ " X und Y " (Konjunktion)
- c) $X \vee Y$ " X oder Y " (Disjunktion)
- d) $X \Rightarrow Y$ "wenn X , dann Y " (Implikation)
- e) $X \Leftrightarrow Y$ "genuß dann X , wenn Y " (Äquivalenz)

Man notiert die Wahrheitswerte am besten in einer Wahrheitstafel!

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \Leftrightarrow Y$	$X \Rightarrow Y$	$(\neg X) \vee Y$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f		f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f	w	w
f	f		f	f	w	w	w

Bemerkung 1.4:

Wir haben in der Wahrheitstafel vor 1.3 gesehen:

$$(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow ((\neg X) \vee Y)$$

Beachte!

- Wenn X wahr ist wahr! $X \Rightarrow Y$ wahr ist, dann ist Y wahr
- " $X \Rightarrow Y$ wahr" alleine sagt nichts über den Wahrheitswert von Y aus!

Bsp: • $((a = b) \Rightarrow (a \cdot c = b \cdot c))$ ist wahr!

• $2 = 2 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$ ist wahr

• $2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 0 \cdot 3$ ist falsch

• $2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 = 0 \cdot 0$ ist wahr

Satz 1.5:

Seien X und Y Aussagen.

(a) $(X \Leftrightarrow Y) \Leftrightarrow ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X))$

(b) $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)$

Beweis:

⑤ ist bewiesen!

⑥ ist bewiesen!

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \Rightarrow Y$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$	$Y \Rightarrow X$	$X \Leftrightarrow Y$	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w	w	w	w

10

Bemerkung 1.6:

② 1.5② sagt: will man $X \Leftrightarrow Y$ zeigen, dann reicht es, $X \Rightarrow Y$ und $Y \Rightarrow X$ zu zeigen!

⑤ 1.5③ ist als **Kontraposition** bekannt:

steht aus X auf Y zu schließen, kann man aus $\neg Y$ auf $\neg X$ schließen!

Definitionsversuch 1.7:

Eine **Aussageform** ist eine Äußerung, die eine oder mehrere Variablen enthält und zu einer Aussage wird, (d.h. w oder f wird), wenn man für die Variablen zulässige Werte einsetzt.

Beispiel 1.8:

$a > b$ ist eine Aussageform, wenn wir für a und b ganze Zahlen als Werte zulassen

z.B.: $a = 42$, $b = 37$, dann: $a > b$ ist wahr!

Notation 1.9:

Wir verwenden in Aussagen und Aussageformen folgende

Quantoren :	$\forall$	$\hat{=}$	"für alle"
	$\exists$	$\hat{=}$	"es existiert ein"
	$\exists_1$	$\hat{=}$	"es existiert genau ein"
	$\nexists$	$\hat{=}$	"es existiert kein"

Wenn $P(x)$ eine Aussageform ist, dann bilden wir Aussagen

- wie :
- $\forall x : P(x) \hat{=} \text{"für alle } x \text{ gilt } P(x)\text{"}$
 - $\exists x : P(x) \hat{=} \text{"es gibt ein } x, \text{ so dass } P(x) \text{ gilt"}$

Beispiel 1.10:

Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl, die um genau 1 größer ist.



$$\forall x : \exists y : y = x + 1$$

Bemerkung 1.11 (richtiges Negieren)

Seien X und Y Aussagen und $P(x)$ eine Aussageform.

(a) $\neg(\neg X) \Leftrightarrow X$

(b) $\neg(X \wedge Y) \Leftrightarrow \neg X \vee \neg Y$

(c) $\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow \neg X \wedge \neg Y$

(d) $\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$

(e) $\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$

Beispiel 1.12:

X : alle Studierenden bekommen Befrag und ein Studierendenticket

$\neg X$: es gibt einen Studierenden, der kein Befrag oder kein Studierendenticket bekommt.

Definition 1.13:

Ein **Axiom** ist eine Aussage, die wir als wahr vorgeben.

Beispiel 1.14:

GG, Art. 54 zur Wahl des Bundespräsidenten:

E: "Wähler ist jeder Deutsche, der ... den 40sten Lebensjahr vollendet hat."

Vom Gesetzgeber vorgegeben, ist E ein Axiom!

Zu Bsp. 1.2:

$$E \Rightarrow B$$

$$E \Rightarrow \neg C$$

§ 2 Mengen

Definitionsversuch 2.1 (Georg Cantor)

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Die in einer Menge zusammengefassten Objekte nennen wir die **Elemente** der Menge.

Notation 2.2:

① Menge angeben durch Auflisten aller Elemente

z.B. $\{1, 2, 5, 3, 4, 0\}$

② Menge angeben durch Angabe einer Eigenschaft

z.B. $\{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl kleiner als } 6\}$

③ Sei M eine Menge.

• $x \in M$ heißt "x ist ein Element von M"

• $x \notin M$ heißt "x ist kein Element von M"

④ $\{\}$ oder $\emptyset$ bezeichnen die **leere Menge**, d.h. die Menge, die kein Element enthält.

Definition 2.3:

Seien M und N zwei Mengen. Wir definieren:

① $M \subseteq N \iff (x \in M \Rightarrow x \in N)$ "M ist Teilmenge von N"

② $M = N \iff (M \subseteq N \wedge N \subseteq M) \stackrel{!}{\iff} (x \in M \iff x \in N)$

③ $M \neq N \iff \neg(M = N) \stackrel{!}{\iff} ((\exists x \in M : x \notin N) \vee (\exists x \in N : x \notin M))$

④ $M \subsetneq N \iff (M \subseteq N \wedge M \neq N)$ "echte Teilmenge"

Bsp. 2.4:

- (a) $\{1, 2, 5, 3, 4, 0\} = \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl kleiner als } 6\}$
- (b) $\{1, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$
- (c) $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$
- (d) $1 \notin \{2, 3\}, \quad 2 \in \{2, 3\}$

Bemerkung 2.5:

Wir setzen die folgenden wichtigen Beispiele von Mengen in unserer Vorlesung als bekannt voraus:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ = Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ = Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen (Dezimalbrüche)

Beachte:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

$\nexists -1 \in \mathbb{N} \quad \nexists \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \quad \nexists \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Wir werden im Verlauf der Vorlesung etliche bekannte Eigenschaften dieser Mengen nochmals ausführlich thematisieren!

Def. 2.6:

Seien M, N und P sowie Π : Mengen für $i \in I$.

- (a) $\Pi \cap N := \{x \mid x \in \Pi \wedge x \in N\}$ Durchschnitt von Π und N
- (b) $\Pi \cup N := \{x \mid x \in \Pi \vee x \in N\}$ Vereinigung von Π und N
- (c) $\Pi \setminus N := \{x \mid x \in \Pi \wedge x \notin N\}$ Differenzmenge von Π ohne N

① $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$ Kartesisches Produkt von M und N

Dabei ist (x, y) ein geordnetes Paar und es gilt
für $(x, y), (x', y') \in M \times N$: $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

② M und N heißen **disjunkt** $\Leftrightarrow M \cap N = \emptyset$

③ $P = M \cup N \Leftrightarrow P = M \cup N \wedge M \cap N = \emptyset$

④ $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid x \in M_i \ \forall i \in I\}$

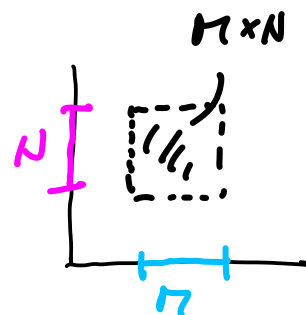
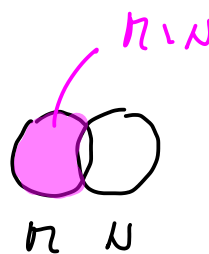
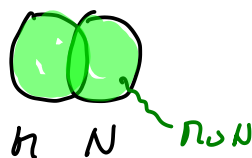
$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$

⑤ $P = \bigcup_{i \in I} M_i \Leftrightarrow P = \bigcup_{i \in I} M_i \wedge \forall i \neq j : M_i \cap M_j = \emptyset$

⑥ $\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\}$ = Kartesisches Produkt der M_i

dabei $(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall i \in I : x_i = y_i$

Graphische Veranschaulichung:



Proposition 2.7:

Seien M, N, P Mengen.

① Assoziativgesetz

• $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$

• $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$

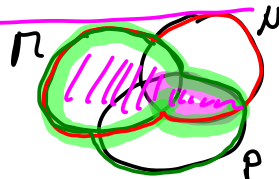
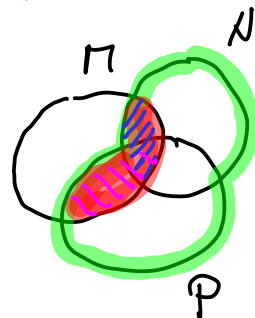
⑥ Kommutativgesetz

$$\bullet M \cup N = N \cup M \quad \bullet M \cap N = N \cap M$$

⑦ Distributivgesetz

$$\bullet \underline{M \cap (N \cup P)} = \underline{(M \cap N) \cup (M \cap P)}$$

$$\bullet \underline{M \cup (N \cap P)} = \underline{(M \cup N) \cap (M \cup P)}$$



⑧ Identitätsgesetze

$$\bullet M \cup \emptyset = M$$

$$\bullet M \subseteq N \Rightarrow M \cap N = M$$

⑨ Komplementgesetz:

$$M \subseteq N \Rightarrow$$

$$\bullet M \cup (N \setminus M) = N$$

$$\bullet M \cap (N \setminus M) = \emptyset$$

Komplement von M in N.

⑩ de Morgansche Regeln:

$$\bullet M \setminus (N \cup P) = (M \setminus N) \cap (M \setminus P)$$

$$\bullet M \setminus (N \cap P) = (M \setminus N) \cup (M \setminus P)$$

Beweis: (Nur Übungsaufgabe)

$$\textcircled{6} \quad M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\} = \{x \mid x \in N \vee x \in M\} = N \cup M$$

$$\textcircled{7} \quad x \in M \cap (N \cup P) \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N \cup P$$

$$\Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \in N \vee x \in P) \Leftrightarrow (x \in M \wedge x \in N) \vee (x \in M \wedge x \in P)$$

$$\Leftrightarrow x \in M \cap N \vee x \in M \cap P \Leftrightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap P)$$

Bemerkung 2.8 (Paradoxon von Russell)

? Wer muss bei der Angabe von Mengen durch Eigenschaften vorsichtig sein!?

Betrachte die "Menge"

$$M := \{X \mid X \text{ ist eine Menge} \wedge X \notin X\}$$

= Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten!

Angenommen: M wäre eine Menge.

$$\Rightarrow M \notin M \quad \text{oder} \quad M \in M.$$

1. Fall: $M \notin M$

$\Rightarrow M$ ist eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält

$$\Rightarrow M \in M \quad \downarrow$$

2. Fall: $M \in M$

$\Rightarrow M$ ist eine Menge, die sich als Element enthält

$$\Rightarrow M \notin M \quad \downarrow$$

Also: Annahme war falsch, und M ist keine Menge!

§ 3 Abbildungen

A) Abbildungen, Bilder und Urbilder

Definition 3.1

Seien M und N zwei Mengen.

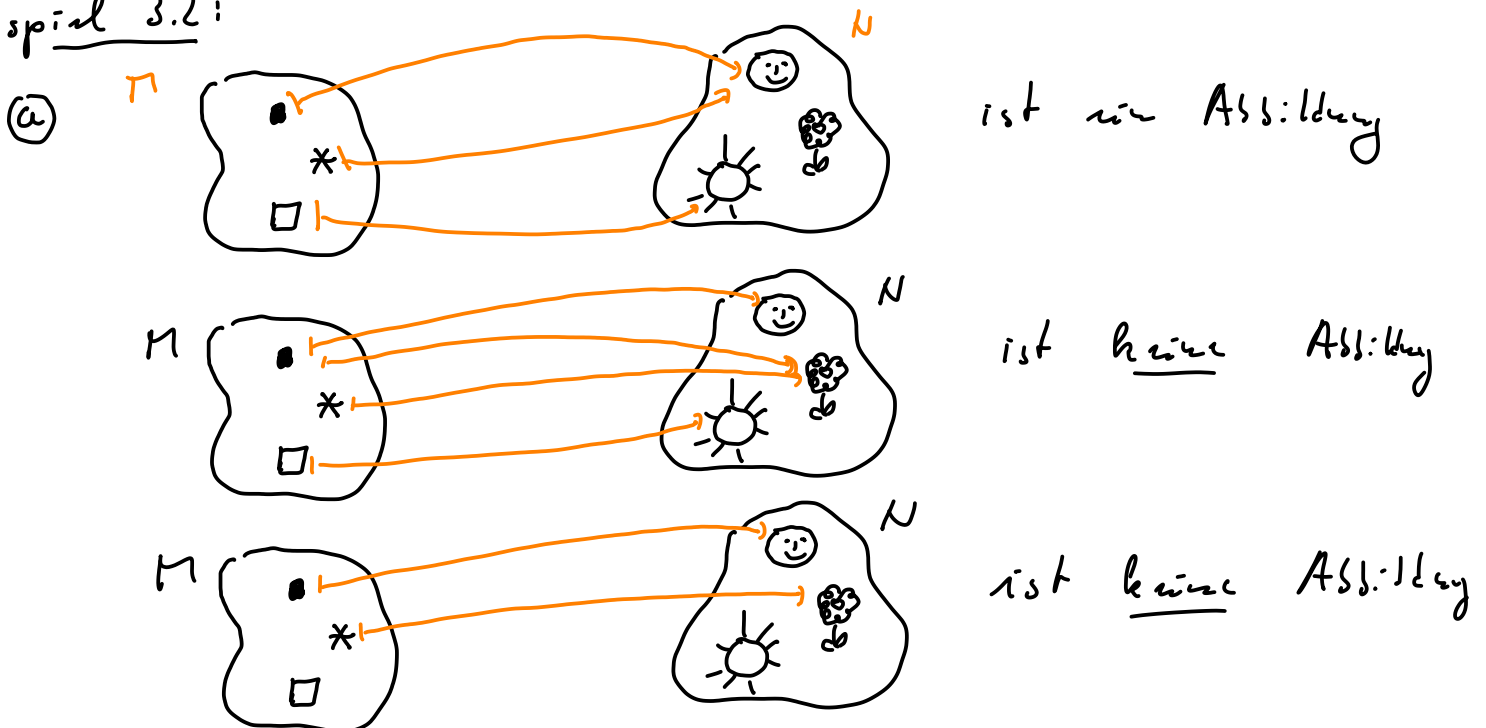
Eine **Abbildung** oder **Funktion** f von M nach N ist eine **eindeutige Zuordnung**, die **jedem** Element $x \in M$ **genau ein** Element $f(x) \in N$ zuweist.

Wir nennen M den **Definitionsbereich** von f und N den **Ziel-** oder **Wertebereich**.

Notation: $f: M \rightarrow N; x \mapsto f(x)$

Beachte: Sind $f: M \rightarrow N$ und $g: X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen, dann gilt: $f = g \Leftrightarrow (M = X \wedge N = Y \wedge \forall x \in M: f(x) = g(x))$

Beispiel 3.2:



$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{b} \quad f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x^2 \\ g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f \neq g, \\ \text{wird die Def.-bereiche nicht identisch!}$$

© Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abb., $A \subseteq M$.

Dann: $f|_A: A \rightarrow N: x \mapsto f(x)$ heißt **Einschränkung** von f auf A .

① Sei M eine Menge.

Dann: $\text{id}_M: M \rightarrow M: x \mapsto x$ heißt die **Identität** auf M .

Definition 3.3:

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung und $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$.

① $\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M\}$ ist der **Graph** von f .

② $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ heißt **Bild** von A unter f .

③ $\text{Im}(f) := f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ heißt das **Bild** von f .

④ $f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ heißt das **Urbild** von B unter f .

Bsp. 3.4:

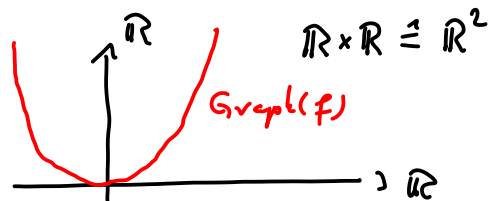
① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$

$$A = \{-1, 0, 1, 2\} \Rightarrow f(A) = \{1, 0, 4\}$$

$$B = \{0, 1\} \Rightarrow f^{-1}(B) = \{0, 1, -1\}$$

$$B' = \{-1\} \Rightarrow f^{-1}(B') = \emptyset$$

$$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$



$$(5) \quad \text{nf}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto x+1$$

$$\Rightarrow \cdot \text{Im}(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\cdot y \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{nf}^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \emptyset & , y=0 \\ \{y-1\} & , y>0 \end{cases}$$

Bemerkung 3.5:

(a) Für $f: M \rightarrow N$ und $g: X \rightarrow Y$, zwei Abb.: $M \rightarrow N$, gilt:

$$f = g \iff \text{Graph}(f) = \text{Graph}(g)$$

(5) Ist $\Gamma \subseteq M \times N$ so, dass $\forall x \in M \exists_1 y \in N: (x, y) \in \Gamma$,
dann gibt es genau eine Abb. $f: M \rightarrow N$ s.d. $\Gamma = \text{Graph}(f)$.

Fazit: Man hätte Abb. von M nach N auch als Teilungen von $M \times N$ definieren können, die die Bed. (5) erfüllen!

B) Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

Def. 3.6:

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

(a) f heißt **surjektiv** $\iff \forall y \in N \exists x \in M: f(x) = y$
 $\iff \text{Im}(f) = N$

(b) f heißt **injektiv** $\iff \forall x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ gilt: $x = x'$

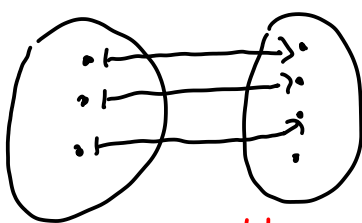
(c) f heißt **bijektiv** $\iff f$ ist injektiv und surjektiv

Bemerkung 3.7: Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

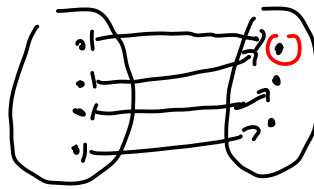
* Wenn $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, dann heißt x Urbild von y .

* Damit:

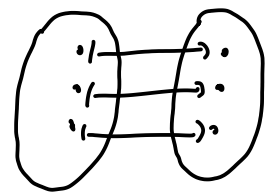
f surjektiv	$\iff$	jedes $y \in N$ hat	mindestens	ein	Urbild
f injektiv	$\iff$	"	"	"	höchstens
f bijektiv	$\iff$	"	"	"	genau



injektiv, nicht surjektiv



nicht injektiv, surjektiv



bijektiv

Bsp. 3.8:

(a) $nf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x+1$ ist injektiv, nicht surjektiv,

denn: $nf(x) = nf(y) \Rightarrow x = y$
 $x+1 \quad y+1$

$\text{Im}(nf) = \mathbb{N} \setminus \{0\} \neq \mathbb{N}$

(b) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv

denn: $g(1) = 1 = g(-1)$, aber $1 \neq -1$

(c) id_M ist bijektiv für jede Menge M .

denn: $\forall y \in M \Rightarrow y = \text{id}_M(y) \Rightarrow \text{id}_M$ surjektiv
 $\forall x, x' \in M$ mit $\text{id}_M(x) = \text{id}_M(x') \Rightarrow \text{id}_M$ injektiv

(d) Sei $f: M \rightarrow N$ injektiv.

Dann: $M \rightarrow \text{Im}(f) : x \mapsto f(x)$ ist bijektiv

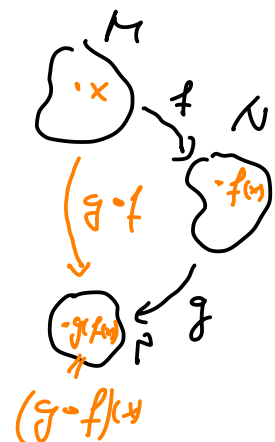
Def. 3.9:

Seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow P$ Abbildungen

Die Abbildung $g \circ f: M \rightarrow P : x \mapsto g(f(x))$

heißt Komposition oder Verkettung

von f und g .



Bsp. 3. 10:

Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x+1$.

Dann: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1 \quad \times$$

Also: $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition 3.11:

Seien $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow P$, $h: P \rightarrow Q$ Abbildungen.

Dann gilt: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Schreibe das wie auch: $h \circ g \circ f$.

Beweis: Sei $x \in M$.

$$\Rightarrow (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

□

Satz 3.12:

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

Dann: (a) f ist bijektiv $\Leftrightarrow \exists g: N \rightarrow M$ mit $f \circ g = \text{id}_N$ und $g \circ f = \text{id}_M$

(b) Die Abl. g in (a) ist dann eindeutig bestimmt und sie ist bijektiv.

Wir nennen g dann die Inverse von f und bezeichnen sie mit f^{-1} .

Beweis: a) " $\Leftarrow$ " Sei $g: N \rightarrow M$ mit $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$.

Zeige: f ist surjektiv.

Sei $y \in N$ und $x := g(y) \in M$

$$\Rightarrow f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = y$$

Also ist f surjektiv.

Zeige: f ist injektiv.

Seien $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$

$$\Rightarrow x = id_M^{-1}(f(x)) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = id_M^{-1}(f(x')) = x'$$

Also ist f injektiv.

" $\Rightarrow$ " Sei f bijektiv. $\Rightarrow \forall y \in N \exists! x_y \in M : f(x_y) = y$

Definiere: $g: N \rightarrow M : y \mapsto x_y = \text{eindeutige } x \text{ mit } f(x) = y$

$$\Rightarrow \forall y \in N : (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x_y) = y = id_N(y)$$

$$\Rightarrow f \circ g = id_N$$

Für $x \in M$ und $y := f(x)$ gilt: $f(x_y) = y = f(x)$

$$\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = x_y \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x_y = x = id_M(x)$$

$$\Rightarrow g \circ f = id_M$$

⑤ Sei $h: N \rightarrow M$ eine zu f Abb mit $f \circ h = id_N$, $h \circ f = id_M$.

Für $y \in N$ gilt: $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = id_N(y) = (f \circ h)(y) = f(h(y))$

$$\stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} g(y) = h(y) \Rightarrow g = h \Rightarrow g \text{ eindeutig!}$$

zu zeigen: g bijektiv wegen Satz ②.

Beispiel 3.13:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2 \cdot x + 1$ ist **bijektiv**

mit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

Dann: $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) + 1$

$$y - 1 + 1 = y$$

"
 $\text{id}_{\mathbb{R}}(y)$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 1) = \frac{1}{2} \cdot (2x + 1) - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

"
 $\text{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ □

Proposition 3.14

Seien $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow P$ Abbildungen.

Dann: (a) f & g **surjektiv** $\Rightarrow$ $g \circ f$ **surjektiv**.

(b) f & g **injektiv** $\Rightarrow$ $g \circ f$ **injektiv**.

(c) f & g **bijektiv** $\Rightarrow$ $g \circ f$ **bijektiv**.

Beweis:

(a) Sei $z \in P$

$$\stackrel{g \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists y \in N: g(y) = z$$

$$\stackrel{f \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists x \in M: f(x) = y$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z \Rightarrow g \circ f \text{ surjektiv}$$

(b) Seien $x, x' \in M$ mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$

$$\text{"} \quad g(f(x)) \quad \text{"} \quad g(f(x'))$$

$$\stackrel{g \text{ injektiv}}{\Rightarrow} f(x) = f(x') \stackrel{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = x' \Rightarrow g \circ f \text{ injektiv.}$$

(c) folgt aus (a) & (b) □

§ 4 Vollständige Induktion

Bemerkung 4.1 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Die folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist uns vertraut:

"Addiert man zur Zahl 0 sukzessive die Zahl 1,
so erhält man nach und nach alle natürlichen Zahlen."

Man nennt sie das Prinzip der vollständigen Induktion.

Mit Hilfe der Nachfolgefunktion $nf: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: n \mapsto n+1$ können
wir die Eigenschaft wie folgt formulieren:

Ist $M \subseteq \mathbb{N}$, so daß ① $0 \in M$ und ② $\forall n \in M: nf(n) \in M$ gilt,
dann gilt schon: $M = \mathbb{N}$

Daraus leiten wir das in folgendem Satz formulierte
Beweisprinzip für Aussagen ab, die von einer natürlichen
Zahl abhängen.

Satz 4.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)

Sei $A(n)$ eine Aussageform mit zulässigen Werten $n \in \mathbb{N}$.

Falls ① $A(0)$ ist wahr und

② $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr,

so ist $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Setze $M := \{ n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr} \}$

Dann: ① $A(0)$ wahr $\Rightarrow 0 \in M$

② Sei $n \in M \Rightarrow A(n)$ ist wahr

$\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr $\Rightarrow nf(n) = n+1 \in M$

$A(n) \Rightarrow A(n+1)$
ist wahr

Also nach 4.2: $M = \mathbb{N} \Rightarrow A(n)$ wahr $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 4.3:

Um " $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr" zu zeigen, reicht es, den Fall zu betrachten, dass $A(n)$ schon wahr ist, weil die Implikation auf alle Fälle wahr ist, wenn $A(n)$ falsch ist!

- Wir nennen:
- " $A(0)$ ist wahr" den **Induktionsanfang**.
 - " $A(n)$ wird als wahr vorausgesetzt" die **Induktionsvoraussetzung**.
 - " $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr" den **Induktionsschritt**.

Beispiel 4.4:

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar
d.h. $n^3 - n$ ist ein Vielfaches von 6

Beweis durch vollständige Induktion

Satz 1: $A(n) : \exists k \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6 \cdot k$

Induktionsanfang: $n=0$: $A(0) : 0^3 - 0 = 0 = 6 \cdot 0$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^3 - n = 6 \cdot k$

Induktionsschritt: zu zeigen:

$$A(n+1) : \exists m \in \mathbb{N} : (n+1)^3 - (n+1) = 6 \cdot m$$

Dann beachte: n oder $n+1$ ist gerade
 $\Rightarrow n \cdot (n+1)$ ist eine gerade Zahl
 $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : n \cdot (n+1) = 2 \cdot l$

$$\begin{aligned} \text{Damit: } (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = (n^3 - n) + 3 \cdot n \cdot (n+1) \\ &= 6 \cdot k + 3 \cdot 2 \cdot l = 6 \cdot (k+l) = 6 \cdot m \end{aligned}$$

Also: $A(n+1)$ wahr $\Rightarrow (A(n) \Rightarrow A(n+1))$ ist $\stackrel{!}{=} \text{wahr}$.

□

Bemerkung 4.5:

② Alternativer Induktionsanfang:

Statt den Induktionsanfang $n=0$ zu wählen, kann man bei einer beliebigen ganzen Zahl n_0 beginnen und erhält dann, dass $A(n)$ wahr ist für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$.

③ Alternative Induktionsvoraussetzung:

Zur Induktionsschritt schließen wir von $A(n)$ auf $A(n+1)$, d.h. wir setzen $A(n)$ als wahr voraus und schließen daraus, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Stattdessen können wir auch $A(n_0), A(n_0+1), \dots, A(n)$ als wahr voraussetzen und auf $A(n+1)$ schließen, wobei $A(n_0)$ der Induktionsanfang ist.

4.6 Bemerkung

Für einen Induktionsbeweis ist der Induktionsanfang unverlässlich ??

Bsp.

$$A(n): \exists k : 10^n = 3 \cdot k \quad (\text{d.h. } 10^n \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar})$$

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$

Induktionsvoraussetzung: $\exists k : 10^n = 3 \cdot k$

Induktionsschritt: $10^{n+1} = 10^n \cdot 10 \underset{\text{Ind.}}{=} (3 \cdot k) \cdot 10 = 3 \cdot (\underbrace{k \cdot 10}_{=: k'}) = 3 \cdot k'$

Der Induktionsschluss funktioniert also, die Aussage ist aber falsch:

Primfaktorzerlegung: $10^n = 2^n \cdot 5^n$

$$\Rightarrow 10^n \text{ hat nur } 2 \text{ und } 5 \text{ als Primteiler} \Rightarrow 3 \nmid 10^n$$

Problem: es gibt keinen Induktionsanfang!

Bemerkung: das zeigt noch mal, dass " $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr" nicht sagt, dass $A(n+1)$ wahr ist !!!

§ 5 Mächtigkeit von Mengen

A) Endliche Mengen

Definition 5.1:

- (a) Eine Menge M heißt **endlich**, wenn sie nur **endlich** viele Elemente hat.
 Setze dann: $|M| := \#M :=$ Anzahl der Elemente von M ,
 die sogenannte **Mächtigkeit** von M .
 M heißt **unendlich** und $|M| = \infty$, wenn M nicht endlich ist.
- (b) Zwei Mengen M und N heißen **gleichmächtig**, wenn es
bijektive Abbildung $f: M \rightarrow N$.
- (c) Eine Menge M heißt **abzählbar unendlich**, falls sie gleichmächtig
 zu $\mathbb{N}$ ist, d.h. $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow M$ bijektiv.
- (d) Eine Menge M heißt **überabzählbar**, wenn sie weder endlich
 noch abzählbar unendlich ist.
- (e) Für $m, n \in \mathbb{Z}$ setze: $\{m, \dots, n\} := \{z \in \mathbb{Z} \mid m \leq z \wedge z \leq n\}$
 = Menge der ganzen Zahlen zwischen m und n !
 Beachte: $m > n \Rightarrow \{m, \dots, n\} = \emptyset$

Bemerkung 5.3: (Einfach Eigenescharfher und tiefer Reizer)

- (a) Π endlich mit $|\Pi| = n$
 $\Rightarrow$ zähle die Elemente in Π ab, z.B. $x_1, x_2, \dots, x_n$
 $\Rightarrow f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \Pi: i \mapsto x_i$ ist bijektiv!

Umgekehrte: $g: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv

$$\Rightarrow M = g(\{1, \dots, n\}) = \underbrace{\{g(1), \dots, g(n)\}}_{\text{paarweise verschieden}} \Rightarrow |M| = n < \infty$$

Fazit: $|M| = n < \infty \iff \exists f: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ surjektiv!

① M endlich und $A \subseteq M \Rightarrow A$ endlich und $|A| \leq |M|$

② $M = A \cup B$ und M endlich $\Rightarrow |M| = |A| + |B|$

Satz 5.3:

Seien M und N zwei nicht-leere endliche Mengen.

Dann:

① $|M| \leq |N| \Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow N$ injektiv

② $|M| \geq |N| \Leftrightarrow \exists g: M \rightarrow N$ surjektiv

③ $|M| = |N|$ $\Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow N$ bijektiv

d.h. M und N sind gleichmächtig.

Beweis:

Seien $M = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $N = \{y_1, \dots, y_n\}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$
und $y_k \neq y_l$ für $k \neq l$. Insb.: $|M| = m$ und $|N| = n$.

① " $\Rightarrow$ " Sei $m \leq n$. Definieren: $f: M \rightarrow N$ durch $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, m$

Dann: Sei $x_i \neq x_j \Rightarrow i \neq j \Rightarrow f(x_i) = y_i \neq y_j = f(x_j)$
 $\Rightarrow f$ ist injektiv.

" $\Leftarrow$ " Sei $f: M \rightarrow N$ injektiv.

$\Rightarrow f(M) = \{f(x_1), \dots, f(x_m)\} \subseteq N$
pauweise verschieden,
wie f injektiv

$\Rightarrow N$ enthält mindestens m p.w. verschiedene Elemente
d.h. $|f(M)| = m$ und $m = |f(M)| \leq |N| = n$

② " $\Rightarrow$ " Sei $m \geq n$. Definieren: $g: M \rightarrow N: x_i \mapsto \begin{cases} y_i, & i \leq n \\ y_1, & i > n \end{cases}$

$\Rightarrow g(M) = \{y_1, \dots, y_n\} = N \Rightarrow g$ ist surjektiv

" $\Leftarrow$ " Sei $g: M \rightarrow N$ surjektiv.

$$\Rightarrow \underbrace{\{g(x_1), \dots, g(x_m)\}}_{\# \leq m} = g(M) = N = \underbrace{\{y_1, \dots, y_n\}}_{\text{p.w. versch. } y_i!}$$

$$\Rightarrow m \geq |g(M)| = |N| = n$$

③ " $\Leftarrow$ " Sei $f: M \rightarrow N$ bijektiv

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ ist injektiv} \Rightarrow m \leq n \\ \text{und} \\ f \text{ ist surjektiv} \Rightarrow m \geq n \end{array} \right\} \Rightarrow m = n$$

" $\Rightarrow$ " Sei $m = n$.

Def.: $f: M \rightarrow N: x_i \mapsto y_i$ für $i=1, \dots, n$

$\Rightarrow f$ injektiv, wie in Teil ②

$$\text{und } f(M) = \{y_1, \dots, y_n\} = \underbrace{\{y_1, \dots, y_n\}}_{m=n} = N$$

$\Rightarrow f$ surjektiv und damit bijektiv $\square$

Lemma 5.4:

Seien M und N zwei endliche Mengen mit $|M| = |N|$

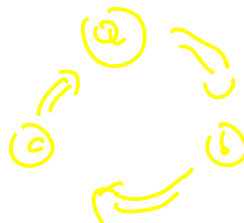
Dann sind die folgenden Aussagen für eine Abbildung

$f: M \rightarrow N$ gleichwertig.

① f ist injektiv.

② f ist surjektiv.

③ f ist bijektiv.



Regelkreis

Beweis: ① $\Rightarrow$ ②: Ang. f ist nicht surjektiv.

$$\Rightarrow \exists y \in N \setminus \text{Im}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) \subseteq N \setminus \{y\}$$

$\Rightarrow g: M \rightarrow \mathcal{P}_m(f) : x \mapsto f(x)$ ist surjektiv, nach Prop. 3.8

$$\Rightarrow |M| \stackrel{\text{s.3}}{=} |\mathcal{P}_m(g)| = |\mathcal{P}_m(f)| \leq |M \setminus \{g\}| = |M| - 1 = |M| - 1$$

Also: f ist surjektiv.

⑥ $\Rightarrow$ ③: Sei $f: M \rightarrow N$ surjektiv.

Zeige: f ist injektiv. (denn surjektiv)

Angenommen: f ist nicht injektiv

$$\Rightarrow \exists x, x' \in M \text{ s.d. } x \neq x', \text{ aber } f(x) = f(x') =: y$$

$$\Rightarrow h: M \setminus f^{-1}(\{y\}) \rightarrow N \setminus \{y\} : x \mapsto f(x)$$

ist surjektiv, da f surjektiv

$$\Rightarrow |M \setminus f^{-1}(\{y\})| \stackrel{\text{s.3}}{\geq} |N \setminus \{y\}| = |N| - 1$$

$\parallel$ $\parallel$

s.3 $|M| - 1$

$$|M \setminus \{x, x'\}| = |M| - 2$$

Also: f ist injektiv.

③ $\Rightarrow$ ②: $f: M \rightarrow N$ bijektiv $\Rightarrow f$ ist injektiv.

Damit ist die Aussage durch Ringchluss bewiesen! □

B) Das Cantorsche Diagonalverfahren

Frage: Gibt es mehr **rationale** als **natürliche** Zahlen?
Gibt es mehr **reelle** als **rationale** Zahlen?

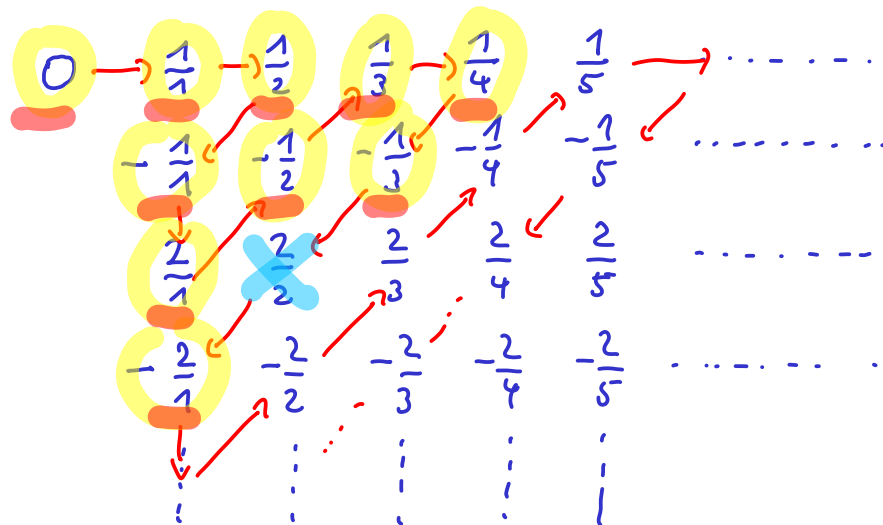
Besser: Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleichmächtig? **Ja (5.5)**
" $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ " ? **Nein (5.6)**

Proposition 5.5: (Cantorsches Diagonalverfahren)

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist **abzählbar unendlich**.

Beweis:

Schreibe alle rationalen Zahlen im folgenden Schema auf:



Durchlaufe das Schema den Pfeilen folgend und sammle im Vorbeigehen die Zahlen auf, aber jede Zahl nur beim ersten Auftreten!

Auf dem Weg konstruieren wir eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$!

□

Proposition 5.6:

Die Menge $\mathbb{R}$ ist **überabzählbar**.

Beweis: Klar: $\mathbb{R}$ ist nicht endlich.

Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar unendlich

$\Rightarrow \exists \varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, die bijektiv ist

Schreibe die Dezimalzahlentwicklung von $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf:

$$\begin{array}{lcl} \varphi(0) = & \boxed{*} & a_{00} \ a_{01} \ a_{02} \ a_{03} \ a_{04} \ \dots \\ \varphi(1) = & \boxed{*} & a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ \dots \\ \varphi(2) = & \boxed{*} & a_{20} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ \dots \\ \varphi(3) = & \boxed{*} & a_{30} \ a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ \dots \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Setze: $a := a_{00} \ a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ \dots \in \mathbb{R}$

Definiere: $b := b_0 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots$ durch $b_i := \begin{cases} 2, & a_{ii} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Dabei gilt $\forall i \in \mathbb{N}: a_{ii} \neq b_i$

Wird φ surjektiv ist, gibt es $i \in \mathbb{N}$, so d.ß:

$$\varphi(i) = b$$

i -te Nachkommastelle ist a_{ii}

i -te Nachkommastelle ist b_i

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\varphi(i) \neq b \quad \Downarrow$$

Also: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar !!!

□

Bemerkung 5.7 (Kontinuumshypothese)

Es gibt **keine** Menge M mit $\mathbb{Q} \subsetneq M \subsetneq \mathbb{R}$,
so daß M weder gleichmächtig zu $\mathbb{Q}$
noch zu $\mathbb{R}$ ist.

Beachte diese Aussage kann auf der Grundlage des
Axiomensystems von Zermelo-Fräkel weder bewiesen
noch widerlegt werden. Sie unabhängig davon!

C) Potenzmengen

Definition 5.8

Sei M eine Menge.

Dann heißt $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ = Menge aller Teilmengen von M

die **Potenzmenge** von M .

Bsp. 5.9:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Proposition 5.10:

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$.

Dann: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

$$\underline{\text{IA: } n=0:} \quad n=0 \Rightarrow M = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \\ \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0 \quad \checkmark$$

IS: $n \mapsto n+1$:

Sei $|M| = n+1$. Wähle $y \in M$ fest.

$$\text{Setze: } N := M \setminus \{y\} \Rightarrow |N| = |M| - 1 = n$$

$$\text{Damit: } \mathcal{P}(M) = \{A \subseteq M \mid y \notin A\} \cup \{A \subseteq M \mid y \in A\}$$

$$\text{Dabei: } \cdot \{A \subseteq M \mid y \notin A\} \stackrel{x:=}{=} \{A \subseteq M \mid A \subseteq N\} = \mathcal{P}(N)$$

$$\cdot \{A \subseteq M \mid y \in A\} \stackrel{y:=}{=} \{B \cup \{y\} \mid B \subseteq N\} = \{B \cup \{y\} \mid B \in \mathcal{P}(N)\}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ bijektiv
 $B \in \mathcal{P}(N)$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = |X \cup Y| = |X| + |Y| = |\mathcal{P}(N)| + |\mathcal{P}(N)|$$

$$= 2 \cdot |\mathcal{P}(N)| \stackrel{\text{Ind.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \checkmark$$

Beweis fertig mit Induktion!

□

§ 6 Äquivalenzrelationen

A) Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

Definition 6.1: Seien M und N zwei Mengen.

Eine Relation zwischen M und N ist eine Teilmenge R von $M \times N$.

Bemerkung 6.2: Sei R eine Relation zwischen M und N , $x \in M, y \in N$.

Sage: x steht in Relation zu y $\Leftrightarrow (x, y) \in R$

Schreib auch $x R y$ statt $(x, y) \in R$.

Bsp. 6.3:

① Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.

Dann ist $\text{Graph} = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$ ist eine Relation zwischen M und N , bei der jeder $x \in M$ zu genau einem $y \in N$ in Relation steht.
"f(x)"

② Sei $M = \{\text{Hörer unser Vorlesung}\}$ und $N = \{\text{in Tübingen studierbare Fächer}\}$.

Dann ist $R = \{(x, y) \in M \times N \mid x \text{ studiert } y\}$ eine Relation zw. M und N , die nicht der Graph einer Fkt. ist!

Def. 6.5:

Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf M ist Teilmenge R von $M \times M$, so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- $(R_1) \quad \forall x \in M : (x, x) \in R$ "Reflexivität"
 $(R_2) \quad (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ "Symmetrie"
 $(R_3) \quad (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ "Transitivität"

Notation 6.6:

Äquivalenzrelationen werden häufig mit Symbolen wie $\sim$ bezeichnet.

d.h.: $\sim \subseteq M \times M$ s.d. die folgenden Axiome gelten:

- $(R_1) \quad \forall x \in M : x \sim x$
 $(R_2) \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x$
 $(R_3) \quad x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Sage für $x \sim y$: x ist äquivalent zu y

Def. 6.7:

Sei M eine Menge und $\sim$ ein ÄR auf M .

Für $x \in M$ heißt $\bar{x} := \{y \in M \mid y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von x .

Zudem: $M/\sim := \{\bar{x} \mid x \in M\}$ = Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$

• $x \in M \Rightarrow x$ heißt **Repräsentant** der Äquivalenzklasse $\bar{x}$

Bsp. 6.8:

Sei $M = \mathbb{R}^2$ = euklidische Ebene und für $P \in M$

Sei $|P|$ = Abstand von P zum Ursprung $(0,0)$.

Definiere: $P \sim Q \Leftrightarrow |P| = |Q|$

Zeige: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2$

(R1) Sei $P \in M \Rightarrow |P| = |P| \Rightarrow P \sim P$

(R2) Seien $P, Q \in M$ mit $P \sim Q$
 $\Rightarrow |P| = |Q| \Rightarrow |Q| = |P| \Rightarrow Q \sim P$

(R3) Seien $P, Q, R \in M$ mit $P \sim Q$ und $Q \sim R$
 $\Rightarrow |P| = |Q| \wedge |Q| = |R| \Rightarrow |P| = |R|$

$\Rightarrow P \sim R$

Also: $\sim$ ist eine ÄR.

Sei $P \in M \Rightarrow \overline{P} := \{Q \mid Q \sim P\} = \{Q \mid |Q| = |P|\}$
 $=$ Kreis um den Ursprung mit Radius $|P|$

Beachte: $P = (0,0) \Rightarrow \overline{P} = \{(0,0)\} = \{P\}$

$P, Q \in M \Rightarrow \underline{\overline{P}} \cap \underline{\overline{Q}} = \emptyset \quad \text{oder} \quad \underline{\overline{P}} = \underline{\overline{Q}}$



$M = \bigcup_{r \geq 0} K_r$ wobei $K_r =$ Kreis um den Ursprung vom Radius r

d.h. M ist die disjunkte Zerlegung der paarweise
verschiedenen Äquivalenzklassen!

B) Äquivalenzrelationen und disjunkte Zerlegungen

Proposition 6.9:

Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine disjunkte Zerlegung von M und für $x, y \in M$

gilt: $x \sim y \iff \exists i \in I: x, y \in M_i$.

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und

für $x \in M_i$ gilt $\bar{x} = M_i$.

Beweis:

$$(R1) \text{ Sei } x \in M = \bigcup_{i \in I} M_i \Rightarrow \exists i \in I: x \in M_i \Rightarrow \begin{matrix} x, x \in M_i \\ \downarrow \\ x \sim x \end{matrix}$$

$$(R2) \text{ Sei } x, y \in M \text{ mit } x \sim y \Rightarrow \exists i \in I: x, y \in M_i \\ \Rightarrow y, x \in M_i \Rightarrow y \sim x$$

$$(R3) \text{ Sei } x, y, z \in M \text{ mit } x \sim y \text{ und } y \sim z \\ \Rightarrow \exists i \in I: x, y \in M_i \quad \text{und} \quad \exists j \in I: y, z \in M_j \\ \Rightarrow y \in M_i \cap M_j \xRightarrow{M_i = \bigcup_{k \in I} M_k} M_i = M_j, \text{ d.h. } i = j \\ \Rightarrow x, z \in M_i \Rightarrow x \sim z$$

Also, $\sim$ ist eine ÄR.

$$\text{Zudem: } x \in M \Rightarrow \exists i \in I: x \in M_i \Rightarrow \bar{x} = \{y \mid y \sim x\} \\ \text{und } x \notin M_j \quad \forall j \neq i \quad = \{y \mid y \in M_i\} = M_i$$

□

Prop. 6.10:

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M .

Dann bilden die p.w. verschiedenen Äquivalenzklassen von $\sim$ eine disjunkte Zerlegung von M .

z.B. $M = \bigcup_{x \in M} \bar{x}$

Insbesondere gilt für $x, y \in M$: $\bar{x} = \bar{y}$ oder $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

Beweis:

Sei $x \in M \stackrel{(R1)}{\Rightarrow} x \in \bar{x} \subseteq \bigcup_{\bar{y} \in \mathcal{P}_\sim} \bar{y} \Rightarrow M = \bigcup_{\bar{y} \in \mathcal{P}_\sim} \bar{y}$.

Es bleibt zu zeigen: $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{P}_\sim \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ oder $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Seien $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{P}_\sim$ mit $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$. zu zeigen: $\bar{x} = \bar{y}$

$\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow z \sim x$ und $z \sim y$

$\stackrel{(R2)}{\Rightarrow} x \sim z \stackrel{(R3)}{\Rightarrow} x \sim y$

Sei $u \in \bar{x} \Rightarrow u \sim x \stackrel{(R3)}{\Rightarrow} u \sim y \Rightarrow u \in \bar{y}$
 $\Rightarrow \bar{x} \subseteq \bar{y}$.

Analog: $\bar{y} \subseteq \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$

□

Korollar 6.11:

Sei M eine endliche Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $M_1, \dots, M_s$ seien die paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen.

Daher: $|M| = |M_1| + |M_2| + \dots + |M_s|$

Beweis: 6.10 $\Rightarrow M = \bigcup_{i=1}^s M_i \stackrel{5.2}{\Rightarrow} |M| = |M_1| + \dots + |M_s|$

□

Beispiel 6.12:

Betrachte $\mathcal{R} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

Definieren: $(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow p \cdot q' = p' \cdot q$

Zeige: $\sim$ ist eine ÄR auf $\mathcal{R}$.

Seien dazu $x = (p, q)$, $x' = (p', q')$, $x'' = (p'', q'')$.

$$(R1) \quad p \cdot q = p \cdot q \Rightarrow x = (p, q) \sim (p, q) = x$$

$$(R2) \quad \begin{aligned} \text{Sei } x \sim x' &\Rightarrow p \cdot q' = p' \cdot q \Rightarrow p' \cdot q = p \cdot q' \\ &\Rightarrow x' = (p', q') \sim (p, q) = x \end{aligned}$$

$$(R3) \quad \text{Seien } x \sim x' \text{ und } x' \sim x'' \Rightarrow p \cdot q' = p' \cdot q, \quad p' \cdot q'' = p'' \cdot q'$$

$\downarrow \cdot q'' \qquad \qquad \qquad \downarrow \cdot q$

$$p \cdot q'' = p'' \cdot q \quad \Leftrightarrow_{q' \neq 0} \quad p \cdot q' \cdot q'' = p' \cdot q \cdot q'' = p' \cdot q'' \cdot q = p'' \cdot q' \cdot q$$

$\downarrow$

$$x = (p, q) \sim (p'', q'') = x'' \Rightarrow \text{Transitivität}$$

Also: $\sim$ ist eine ÄR auf $\mathcal{R} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

Setze:

- $(p, q) \in \mathcal{R} \Rightarrow \frac{p}{q} := \overline{(p, q)}$

- $\mathbb{Q} := \frac{\mathcal{R}}{\sim}$

D.h.: Eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist eine ÄKlasse von Tupeln (r, s) aus $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und es gilt:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow p \cdot s = r \cdot q \quad \left(\Leftrightarrow \frac{p \cdot s}{q \cdot s} = \frac{r \cdot q}{q \cdot s} \right)$$

Repräsentation:

$$\bullet \quad \frac{p}{q} + \frac{r}{s} := \frac{p \cdot s + q \cdot r}{q \cdot s}$$

$$\bullet \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} := \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$$

Vorsicht:

Nur nicht in der Definition Repräsentanten der Äkl.,
und die sind nicht eindeutig!

Frage Wozu ist das unabhängig von der Wahl der Repräsent.?

$$\begin{array}{ccc} \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} , & \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} & \stackrel{?}{\Rightarrow} \frac{p \cdot r}{q \cdot s} \stackrel{?}{=} \frac{p' \cdot r'}{q' \cdot s'} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ p \cdot q' = p' \cdot q & r \cdot s' = r' \cdot s & \Rightarrow p \cdot r \cdot q' \cdot s' = p' \cdot r' \cdot q \cdot s \end{array}$$

Damit: die Multiplikation reiner Zahlen ist **wohldefiniert!**

§ 7 Gruppen und Körper

A) Gruppen

Def. 7.1:

- (a) Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nicht-leeren Menge G und einer zweistelligen Operation, d.h. einer Abb. $*: G \times G \rightarrow G: (g, h) \mapsto g * h$, so dass folgende Axiome gelten:

(G1) $\forall g, h, k \in G: (g * h) * k = g * (h * k)$ "Assoziativität"

(G2) $\exists e \in G: \forall g \in G: e * g = g$ "Existenz eines Neutralen"

(G3) $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G: g^{-1} * g = e$ "Existenz von Inversen"

Ein Element $wie e$ wird ein **Neutrales** von G genannt und ein Element $wie g^{-1}$ ein **Inverses** zu g genannt.

- (b) Eine Gruppe $(G, *)$ heißt **abelsch** oder **kommutativ**, falls gilt: (G4) $\forall g, h \in G: g * h = h * g$. "Kommutativgesetz"

Bsp. 7.2:

- (a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind abelsche Gruppen mit 0 als Neutralem und $-g$ als Inverses zu g .

- (b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen mit 1 als Neutralem und $\frac{1}{g}$ als Inverses zu g .

- (c) Sei M eine nicht-leeren Menge.

Betrachte: $G := \text{Sym}(M) := \{f: M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$

Beh: die Verkettung von Abbildungen liefert eine
zweistellige Operation auf G

$$G \times G \longrightarrow G : (f, g) \longmapsto f \circ g$$

Beh: $(\text{Sym}(n), \circ)$ ist eine Gruppe

Denn: (G1) folgt aus 3.11

$$(G2) \quad \text{id}_n \circ f = f, \text{ da: } (\text{id}_n \circ f)(x) = \text{id}_n(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$
$$\forall f \in \text{Sym}(n)$$

$$(G3) \quad \text{Sei } f \in \text{Sym}(n), \text{ d.h. } f: \Omega \rightarrow \Omega \text{ bijektiv,}$$
$$\stackrel{3.11}{\Rightarrow} \exists f^{-1}: \Omega \rightarrow \Omega : f^{-1} \circ f = \text{id}_n = f \circ f^{-1}$$
$$\Rightarrow f^{-1} \text{ ist Inverse zu } f \text{ im Sinne von (G3).}$$

Beh: $|\Omega| \geq 3 \Rightarrow (\text{Sym}(\Omega), \circ)$ ist nicht abelsch!

Bem. 7.3:

Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

(a) Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt,
und es gilt: $\forall g \in G : e * g = g * e = g$.

(b) Sei $g \in G$. Das Inverse g^{-1} zu g ist eindeutig bestimmt,
und es gilt: $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

$$(c) \quad \forall g, h \in G : (g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1} \quad \text{und} \quad (g^{-1})^{-1} = g$$

(d) Wenn die Gruppenoperation als Multiplikation und mit
" " bezeichnet wird, dann schreiben wir meist 1 für

das Neutrale und $\frac{1}{g}$ für das Inverse zu g .

Wenn die Gruppenoperation als Addition und mit "+" bezeichnet wird, dann schreiben wir meist 0 für das Neutrale und $-g$ für das Inverse sowie $g-h$ für $g+(-h)$.

Lemma 7.4 (Kürzungsregeln)

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $g, a, b \in G$.

Dann: (a) $g * a = g * b \Rightarrow a = b$

(b) $a * g = b * g \Rightarrow a = b$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad g * a = g * b & \xRightarrow{\text{(G3)}} \underset{\text{/(G1)}}{g^{-1} * (g * a)} = \underset{\text{/(G1)}}{g^{-1} * (g * b)} \\ & \quad \underset{\text{/(G3)}}{(g^{-1} * g) * a} \quad \underset{\text{/(G3)}}{(g^{-1} * g) * b} \\ & \quad \underset{\text{(G2)}}{a = e * a} \quad \underset{\text{(G2)}}{e * b = b} \end{aligned}$$

(b) analog.

□

B) Körper

Def. 7.5: @ Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K und zwei zweistelligen Operationen

$$+: K \times K \rightarrow K : (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad \cdot: K \times K \rightarrow K : (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

so dass folgende Axiome gelten:

① $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralen 0 .

② $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralen 1 .

③ $\forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \wedge (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

"Distributivgesetze"

④ Eine Teilmenge L von K , die mit denselben Operationen auch ein Körper ist, nennt man einen Teilkörper von K .

Bsp. 7.6:

① $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper und $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$.

② $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, weil 2 kein multipl. Inverses hat!

③ $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$

Definieren $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{F}_2$ durch die Tabellen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Mit dieser Festlegung erfüllt $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ die Axiome eines Körpers!

Beachte: • $\mathbb{F}_2$ ist der kleinste Körper, den es gibt.

• $\mathbb{F}_2$ ist kein Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

weil $1 + 1 = 0$

① Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$,

Erinnerung an die Division mit Rest in $\mathbb{N}$:

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad \exists_1 q, r \in \mathbb{N} : a = q \cdot p + r \text{ und } 0 \leq r < p$$

Notation: $r(a:p) := r$

Definition: $+$: $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ durch $a+b := r(a+b:p)$

$\cdot$: $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p$ durch $a \cdot b := r(a \cdot b:p)$

Beachte: $\underbrace{1+1+\dots+1}_{p\text{-mal}} = r(1+\dots+1:p) = r(p:p) = 0$

$$\bullet \quad a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{F}_p}}{-a} \stackrel{!}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{N}}}{p-a} \in \mathbb{F}_p$$

$$\bullet \quad 0 \neq a \in \mathbb{F}_p \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{F}_p}}{a^{-1}} = ? \quad \text{Kann mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus' erfindet werden!}$$

Notation 7.7: Sei K ein Körper und seien $x, y, z \in K$.

$$\bullet \quad x - y := x + (-y)$$

$$\bullet \quad \frac{x}{z} := x \cdot z^{-1}$$

$$\bullet \quad x y := x \cdot y$$

Lemma 7.8 (Rechenregeln)

Sei K ein Körper, $x, y, z \in K$ und $u, v \in K \setminus \{0\}$.

$$\text{Dann: } \textcircled{a} \quad -(-x) = x \qquad \textcircled{b} \quad x+y=z \iff x=z-y$$

$$\textcircled{c} \quad -(x+y) = -x-y \qquad \textcircled{d} \quad 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$$

$$\textcircled{e} \quad (-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

$$(f) (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

$$(g) x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$$

$$(h) (u^{-1})^{-1} = u$$

$$(j) u \cdot x = u \cdot y \Rightarrow x = y$$

$$(i) x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } y = 0$$

$$(k) \frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv}, \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv}$$

Beweis: (a), (b), (c) + (d) folgen aus 7.3 + 7.4

$$(d) 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \cdot x \quad \text{Analog: } x \cdot 0 = 0$$

KR 7.4

$$(e) x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y \stackrel{(d)}{=} 0$$

$\Rightarrow (-x) \cdot y$ hat die Eigenschaft des add. inversen Elementes
von $x \cdot y$

$$\stackrel{\substack{7.3 \\ \text{Eindeutigkeit}}}{\Rightarrow} (-x) \cdot y = -(x \cdot y) \quad \text{Analog: } x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$$

$$(f) (-x) \cdot (-y) \stackrel{(e)}{=} - (x \cdot (-y)) \stackrel{(e)}{=} - (- (x \cdot y)) \stackrel{(a)}{=} x \cdot y$$

$$(g) \text{ analog}$$

(j) folgt mit demselben Beweis wie KR 7.4

$$(i) \text{ "}\Leftarrow\text{" } x = 0 \text{ oder } y = 0 \Rightarrow x \cdot y = 0$$

$$\text{"}\Rightarrow\text{" } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \in K \setminus \{0\}$$

$$x, y \in K \setminus \{0\}$$

$$\text{d.h. } x \cdot y \neq 0.$$

$$(h) \text{ umrechnen.}$$

□

C) Summen, Produkte und der Binomische Lehrsatz

Notation 7.9

Sei K ein Körper und seien $x_0, \dots, x_n \in K$ für $n \in \mathbb{N}$.

Schreibe: $\prod_{i=0}^n x_i := x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_n = \text{Produkt von } x_0, \dots, x_n$

$\sum_{i=0}^n x_i := x_0 + x_1 + \dots + x_n = \text{Summe von } x_0, \dots, x_n$

Festlegung: leeres Produkt = 1, leere Summe = 0

Außerdem definieren wir für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\bullet \quad x^n := \begin{cases} 1, & n=0 \\ \prod_{i=1}^n x = \underbrace{x \cdots x}_{n\text{-mal}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x^{-n} := (x^{-1})^n = \underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n\text{-mal}} = \frac{1}{x^n}, \text{ falls } x \neq 0$$

$$\bullet \quad n \cdot x := \begin{cases} 0, & n=0 \\ \sum_{i=1}^n x = \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-mal}}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad (-n) \cdot x := n \cdot (-x) = \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n\text{-mal}}$$

Bem. 7.20 (Rekursionsprinzip)

Idee: definieren etwas für die nat. Zahl n , durch Rückführung auf die Definition für $n-1$

Bsp: $\prod_{i=0}^0 x_i := x_0$ und $\prod_{i=0}^n x_i := x_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} x_i$

Bsp. 7.11 (Gauß)

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + \dots + n \stackrel{!}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis durch vollständige Induktion

$n=0$: $\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2} \quad \checkmark$

$n-1 \rightarrow n$: $\sum_{k=0}^n k = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-1} k \right)}_{\text{Ind.}} + n = \frac{(n-1) \cdot ((n-1)+1)}{2} + n$

$$= \frac{(n-1) \cdot n}{2} + \frac{2 \cdot n}{2} = \frac{(n-1) \cdot n + 2 \cdot n}{2}$$

$$= \frac{n \cdot ((n-1) + 2)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

□

Satz 7.12 (Endliche geometrische Reihe)

Sei K ein Körper, $1 \neq q \in K$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Beweis durch vollständige Induktion:

$n=0$: $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1 - q}{1 - q} \quad \checkmark$

$n \rightarrow n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^n q^k}_{\text{Ind.}} = q^{n+1} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$= \frac{q^{n+1} \cdot (1 - q)}{1 - q} + \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{\cancel{q^{n+1}} - q^{n+2} + 1 - \cancel{q^{n+1}}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

□

Def. 7.13:

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren:

$$n! := \begin{cases} \prod_{i=1}^0 i = 1 & , n=0 \\ \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & , n \geq 1 \end{cases}$$

heißt n -Fakultät

Für $k, n \in \mathbb{N}$ definieren den **Binom: Koeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Prop. 7.14

Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Beweis:

1. Fall: $k = 0$.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} = \frac{(n+1)!}{0! \cdot (n+1)!} = 1 = 0 + 1 = \binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

2. Fall: $k = n+1$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot 0!} = 1 = 1 + 0 = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

3. Fall: $k < 0$ oder $k > n+1$.

$$\binom{n+1}{k} = 0 = 0 + 0 = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \checkmark$$

4. Fall: $1 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-(k-1))! \cdot (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{(n+1-k)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{n+1-k}{n+1-k}$$

$$= \frac{k \cdot n!}{(n+1-k)! \cdot k!} + \frac{(n+1-k) \cdot n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n! \cdot (\cancel{k} + n+1 - \cancel{k})}{(n+1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}$$

□

Satz 7.15 (Binomischer Lehrsatz)

Für K ein Körper, $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

Beweis durch Induktion nach n :

$n=0$: $(x+y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k}$ ✓

$n \rightarrow n+1$: $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = \underbrace{(x+y)^n}_x \cdot \underbrace{(x+y)}_y$

z.z. $= x \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} + y \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot X^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \cdot \underbrace{X^{k-1+1}}_{x^k} \cdot \underbrace{y^{n-(k-1)}}_{y^{n+1-k}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

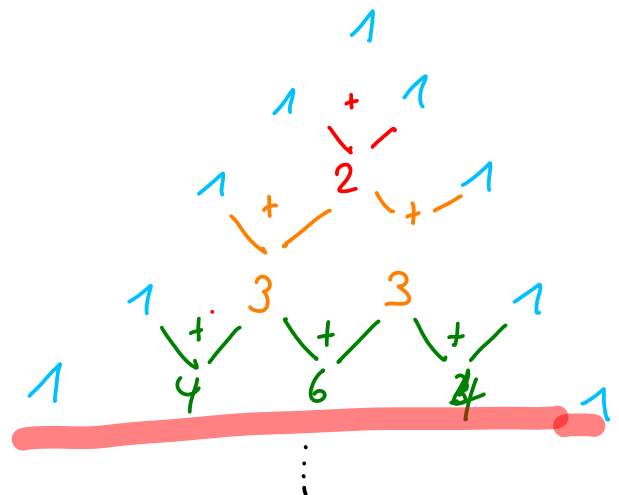
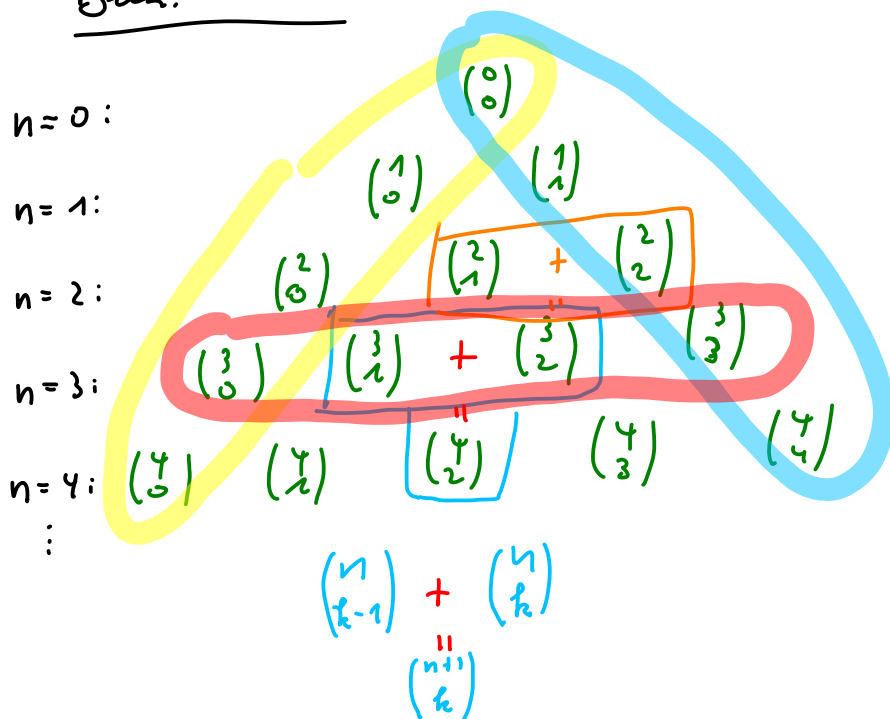
$$= X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{\substack{= \\ \text{7.14} \\ \binom{n+1}{k}}} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= X^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot X^k \cdot y^{n+1-k} \quad \checkmark$$

□

Bem. 7.16 (Pascalsches Dreieck)



Die n -te Zeile im Pascalschen Dreieck enthält genau die Binomialkoeffizienten im Binom. Lehrsatz für n !

z.B.: $(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^0 \cdot y^4 + \binom{4}{1} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^3 \cdot y + \binom{4}{4} \cdot x^4 \cdot y^0$
 $= y^4 + 4x \cdot y^3 + 6 \cdot x^2 y^2 + 4 \cdot x^3 y + x^4$

□

§ 8 Ordnungsrelationen

A) Ordnungsrelationen

Def. 8.1: Sei M eine Menge.

Eine **Ordnungsrelation** oder **Halbordnung** oder **partielle Ordnung** auf M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- (01) $(x, x) \in R$ "Reflexivität"
- (02) $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$ "Antisymmetrie"
- (03) $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ "Transitivität"

Wir nennen dann (M, R) auch eine **teilgeordnete Menge**.

Bsp. 8.1: Sei $M = \mathbb{N}$.

- (a) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \leq y \}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$
- (b) $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } y \}$ " " " auf $\mathbb{N}$

Notation 8.3:

Ordnungsrelationen werden meist mit Symbolen wie " $\leq$ " statt " R " bezeichnet, und wir haben:

$$x \leq y \iff (x, y) \in \leq$$

Damit:

$$(01) \quad \forall x \in M : x \leq x$$

$$(02) \quad x \leq y \text{ und } y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$(03) \quad x \leq y \text{ und } y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

Schreib: Wenn $x \neq y$ und $x \leq y$, schreiben: $x < y$

Bsp. 8.4: Sei N eine Menge und $M := \mathcal{P}(N)$.

Für $A, B \in M$ setze:

$$A \leq B \quad : \Leftrightarrow \quad A \subseteq B$$

Dann ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M

Dann: (O1) $\forall A \in M : A \leq A$

(O2) $A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B$

(O3) $A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$

Beachte: i.e. stehen nicht alle Elemente von $\mathcal{P}(N) = M$ bzgl. $\leq$ in Relation zueinander

z.B.: $M = \mathcal{P}(N)$, $A = \{2\}$, $B = \{3\} \Rightarrow A \not\leq B, B \not\leq A$

Def. 8.5: Sei M eine Menge.

(a) Eine Ordnungsrelation $\leq$ auf M heißt **Totalordnung** oder **lineare Ordnung**, wenn je zwei Elemente aus M bzgl. $\leq$ vergleichbar sind, d.h. $\forall x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

(b) Sei $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M , $A \subseteq M$ und $x \in A$.

Dann: x heißt **minimal in A** : $\Leftrightarrow \forall y \in A$ mit $y \leq x$ gilt $y = x$

x heißt **maximal in A** : $\Leftrightarrow \forall y \in A$ mit $x \leq y$ gilt $y = x$

(c) Eine **Wohlordnung** ist eine **Totalordnung**, so dass jede nicht-leere Teilmenge ein minimales Element enthält.

Lemma 8.6:

Wenn eine Menge ein Minimum oder Maximum besitzt, dann ist dieses eindeutig!

Bsp. 8.7:

(a) $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet, aber $\leq$ ist keine Wohlordung!

Wahre
 $\leq$ -Relation

(b) $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist total geordnet, aber nicht wohlgeordnet

(c) Ordnen $\mathbb{Z}$ wie folgt:

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < \dots$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ totalgeordnet und wohlgeordnet!

Bem. 8.8 (Archimedisches Prinzip)

Jede nicht-leere Teilmenge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl!

D.h. $(\mathbb{N}, \leq)$ ist wohlgeordnet!

B) Die Charakteristik eines Körpers

Def. 8.9: Es sei K ein Körper.

Wenn $n \cdot 1_K = 0_K$ für ein $0 \neq n \in \mathbb{N}$ gilt, dann nennen wir

$$\text{char}(K) := \min \{ n > 0 \mid n \cdot 1_K = 0_K \} \in \mathbb{N}.$$

die Charakteristik des Körpers K .

Ansonsten setzen wir $\text{char}(K) := 0$.

Prop. 8.10

Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 0$.

Dann ist $\text{char}(K)$ eine Primzahl.

Beweis:

Angenommen,

$n := \text{char}(K)$ keine Primzahl

$$\Rightarrow \exists 0 < a, b < n : n = a \cdot b$$

$$\text{Setze: } x := a \cdot 1_K, \quad y := b \cdot 1_K.$$

$$\Rightarrow x \cdot y = (a \cdot 1_K) \cdot (b \cdot 1_K) = (a \cdot b) \cdot 1_K = n \cdot 1_K = 0_K$$

$$\Rightarrow 0 = x = a \cdot 1_K \quad \text{oder} \quad 0 = y = b \cdot 1_K$$

$$\Downarrow \\ n > a \geq \text{char}(K) = n$$

$$\Downarrow \\ n > b \geq \text{char}(K) = n$$

Also: n ist eine Primzahl. □

Bsp. 8.11:

① $\text{char}(\mathbb{Q}) = \text{char}(\mathbb{R}) = 0$

② $\text{char}(\mathbb{F}_p) = p$

C) Das Supremum

Def. 8.12: Sei $(M, \leq)$ total geordnet und $\emptyset \neq A \subseteq M$.

① $s \in M$ heißt eine **oben Schranke** von $A : \Leftrightarrow \forall x \in A : x \leq s$.
" " " **unten Schranke** " " : $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \geq s$.

② A heißt **nach oben beschränkt** : $\Leftrightarrow A$ hat eine **oben Schranke**.
" " " **nach unten** " : $\Leftrightarrow$ " " " **unten** " .

③ $s \in M$ heißt **Supremum** von $A : \Leftrightarrow s = \min\{s \in M \mid s \text{ oben Schranke von } A\}$
" " **Infimum** " " : $\Leftrightarrow s = \max\{s \in M \mid s \text{ unten Schranke von } A\}$

Notation: $\sup(A) = \text{Supremum von } A$, $\inf(A) = \text{Infimum von } A$

④ A heißt **beschränkt** : $\Leftrightarrow A$ ist nach oben und unten beschränkt.

Bsp 8.13:

- (a) Sei A Teilmenge einer totalgeordneten Menge M .
Wenn A ein Maximum besitzt, dann gilt: $\max(A) = \sup(A)$.
" " " Minimum " , " " : $\min(A) = \inf(A)$
- (b) $M = \mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation und $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$
 $\Rightarrow 1 = \max(A) = \sup(A)$, $\nexists \min(A)$, $0 = \inf(A)$.
- (c) $M = \mathbb{Q}$ mit der üblichen Ordnungsrelation und $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{x}{x^2} \leq 2\}$
 $\Rightarrow A$ ist nach oben beschränkt, hat in $\mathbb{Q}$ aber kein Supremum.

Bem. 8.14 (Supremum existenz)

Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$
besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum!

Analog: jede nicht-leere, nach unten beschränkte
Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum!

D) Angeordnete Körper

Def. 8.15:

Sei K ein Körper und $\leq$ eine Totalordnung auf K .

Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ ein **angordneter Körper**,

falls (1) $\forall x, y, z \in K$ mit $x < y$ gilt $x + z < y + z$

(2) $\forall x, y, z \in K$ mit $x < y$ und $0 < z$ gilt $x \cdot z < y \cdot z$

d.h. $\leq$ ist mit $+$ und $\cdot$ verträglich.

Ein $x \in K$ heißt **positiv**, falls $0 < x$, und **negativ**, falls $x < 0$.

(c) $0 < 1^2 = 1$
 $\uparrow$
 (b)

(d) Seien $0 < x < y$.

Dann: $0 < y$

Anf: $\frac{1}{y} < 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{y} \cdot y < 0 \cdot y = 0$ $\rightarrow \text{⊗}$

Also: $0 < \frac{1}{y}$ Analog: $0 < \frac{1}{x}$

$\Rightarrow 0 = 0 \cdot \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$
 $x < y$

(e) Seien $x < y$ und $u < v$

$\Rightarrow x + u < y + u$ und $u + y < v + y$

$\Rightarrow x + u < v + y = y + v$

(f) + (g) : Übungsaufgabe.

Ⓚ

Prop. 8.18:

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper, $A \subseteq K$ und $s \in K$.

Dann: (a) $s = \sup(A) \Leftrightarrow$ ① $\forall x \in A : x \leq s$

② $\forall 0 < \varepsilon \in K : \exists x \in A : s - \varepsilon < x$

(b) $s = \inf(A) \Leftrightarrow$ ① $\forall x \in A : x \geq s$

② $\forall 0 < \varepsilon \in K : \exists x \in A : s + \varepsilon > x$

Beweis: (a) " $\Rightarrow$ " Sei $s = \sup(A) \Rightarrow s$ ist obere Schranke von $A \Rightarrow$ ①

Sei $0 < \varepsilon \in K \Rightarrow s - \varepsilon < s \Rightarrow s - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A
 $\Rightarrow \exists x \in A : s - \varepsilon < x$

" $\Leftarrow$ " ① $\Rightarrow$ s ist eine obere Schranke

Nach z.z.1 es gibt keine kleinere obere Schranke von A

Sei $t \in K$ mit $t < s$. Setze: $K \ni \varepsilon := s - t > 0$

$$\Rightarrow \exists x \in A: x > s - \varepsilon = s - (s - t) = t$$

②

$\Rightarrow t$ ist keine obere Schranke von A

Also: $s = \min \{ \text{obere Schranken von } A \} = \sup(A)$

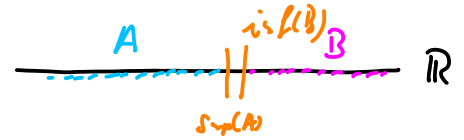
⑥ analog zu ⑤.

12]

Lemma 8.19:

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ zwei nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit
 $a \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Dann: $\sup(A) \leq \inf(B)$



Beweis: Vor. $\Rightarrow A$ nach oben beschränkt & B nach unten beschr. $\Rightarrow$ $\sup(A)$ und $\inf(B)$ existieren
8.11

Anf: $\sup(A) > \inf(B)$

$$\Rightarrow \varepsilon := \frac{\sup(A) - \inf(B)}{2} > 0$$

$\Rightarrow \sup(A) - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A und
 $\inf(B) + \varepsilon$ " " untere " von B

$$\Rightarrow \begin{aligned} \exists a \in A: a &> \sup(A) - \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2} \\ \exists b \in B: b &< \inf(B) + \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2} \end{aligned} \gg$$

$$\Rightarrow a > b \quad \text{⚡}$$

Also: $\sup(A) \leq \inf(B)$

Ⓜ

§ 9 Eigenschaften der reellen Zahlen

A) Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen

Theorem 9.1

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen Ordnungsrelation ist der einzige angeordnete Körper, in dem jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Bemerkung 9.2:

Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angordneter Körper, der das Supremumaxiom erfüllt, dann sagt Theorem 9.1:

$\exists f: \mathbb{R} \rightarrow K$ bijektiv, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\bullet \quad \underline{f(x+y) = f(x) + f(y)} \quad \wedge \quad \underline{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)}$$

$$\bullet \quad \underline{x \leq y} \quad (\Rightarrow) \quad \underline{f(x) \leq f(y)}$$

Idee: alle weiteren Eigenschaften von $\mathbb{R}$ werden wir aus diesen Axiomen ableiten, ohne Bezug zu Dezimalzahlen?

Satz 9.3 ($\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.)

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$,

so dass: $y < n \cdot x$.

Beweis:

Setze: $A := \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$.

Zeige: y ist kein Oberes Schranken von A .

A₄: A ist beschränkt.

$$\Rightarrow \delta := \sup(A) \text{ existiert}$$

$\Rightarrow \underset{0 < x}{s-x} < s \quad \Rightarrow s-x \text{ ist keine ober. Schranke von } A$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : s - x < n \cdot x$$
$$\Rightarrow S = (s-x) + x < n \cdot x + x = \underbrace{(n+1)}_A \cdot x$$

$\Rightarrow$ δ kein oberer Schranken in A

Also: A ist nicht mehr oben beschränkt

$\Rightarrow y$ ist keine obere Schranke von A

$$\Rightarrow \exists u \in U : y < u \cdot x$$

17

Kollar 9.4

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n+1$

(b) $\forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}_{>0} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Beweis:

② 1. Fall: $0 \leq x < 1$. 2. Fall: $x = 0$. ✓

2. Fall: $1 \leq x$. $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : x < m \cdot 1 = m$

Satz: $M := \{k \in \mathbb{N} \mid x < k\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow m_0 := \min(\pi)$ exist.
AP 8.8

$$\text{Set } i: \quad n := n_0 - 1 \quad \Rightarrow \quad n < n_0$$
$$\Rightarrow n \leq x < n_0 = n+1$$

$u_0 = u_1 \in \mathcal{U}$
 $\Rightarrow u \notin \mathcal{U}$

3. Fall: $x < 0$

$$\Rightarrow 0 < -x \stackrel{1.12. Fall}{\Rightarrow} \exists m \in \mathbb{N} : m \leq -x < m+1$$

$$\Rightarrow -(m+1) < x \leq -m$$

Fall 3.a: $x = -m$, setze: $n := -m$ ✓

Fall 3.b: $x < -m$, setze: $n := -(m+1)$ ✓

(6) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$.

$$\stackrel{8.17}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{\varepsilon} \stackrel{a)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\stackrel{8.17}{\Rightarrow} 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

□

B) Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Def. 9.5: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ heißt ein abgeschlossenes Intervall.
 - $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ " " offenes Intervall.
 - $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
 - $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ } heißen halboffene Intervalle.
 - $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
 - $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
 - $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
 - $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
 - $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$
- heißt unechtliche Intervalle.

Satz 9.6 ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann: $\exists q \in \mathbb{Q} : q \in (a, b)$

D.h.: zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale!

Beweis:

$$\cdot a < b \Rightarrow 0 < b - a \xRightarrow{9.4} \exists n \in \mathbb{N}: 0 < \frac{1}{n} < b - a$$

$$\cdot 9.4 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}: m \leq n \cdot a < m + 1$$

$$\Rightarrow a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + b - a = b$$

$\cap$
 $\mathbb{Q} \cap (a, b)$

□

Satz 9.7 (Bernoullische Ungleichung)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Dann: $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Beweis durch Induktion nach n :

$n=0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x \quad \checkmark$

$n \mapsto n+1$ Ind. $\Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow_{1+x \geq 0} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+n \cdot x) \cdot (1+x) = 1 + (n+1) \cdot x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot x \end{aligned}$$

□

Satz 9.8:

$$\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \exists_1 a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^n = x$$

Wir nennen a die nicht-negative n -te Wurzel aus x

Notation: $a =: \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}$

Beweis:

Verwendet 9.1, insbesondere das Supremum + Bernoullische Ungleichung!

□

Satz 9.10:

$$\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$$

Beweis:

Anf: $\exists q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q^2 = 2$

o.E: $\frac{a}{b}$ ist in gekürzter Form, d.h. a & b sind teilerfremd!

$$\Rightarrow 2 = q^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow a^2 \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow a \text{ ist gerade} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = 2 \cdot c$$

$$\Rightarrow 4 \cdot c^2 = (2 \cdot c)^2 = a^2 = 2 \cdot b^2 \Rightarrow b^2 = 2 \cdot c^2 \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow b \text{ ist gerade} \Rightarrow \exists d \in \mathbb{Z} : b = 2 \cdot d$$

$\swarrow$ a, b teilerfremd

Also: $\nexists q \in \mathbb{Q} : q^2 = 2$

□

Nachtrag: Beweis von Satz 9.8

Beh: $\forall x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \quad \exists a \in \mathbb{R}_{\geq 0} : a^n = x$

Beweis:

Existenz von a :

Anf: $\exists a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a \neq b$ und $a^n = x = b^n$

o.E: $0 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq \underbrace{a^n}_x < \underbrace{b^n}_x$ $\swarrow$

Also: es gibt keines $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $a^n = x$.

Existenz von a :

Falls $x = 0$, dann: $a = 0$ tut's!

Sei also $0 < x$.

Def.: $A := \{ y \in \mathbb{R} \mid \underline{y \geq 0} \text{ und } \underline{y^n \leq x} \} \neq \emptyset$

$\nearrow 0$

Zeige: $1+x$ ist eine obere Schranke für A

Sei $y \in \mathbb{R}$ m. $y \geq 1+x > 0$.

$$\Rightarrow y^n \geq (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x > x$$

Bernoulli
($x > 0$)

$\Rightarrow y \notin A \Rightarrow 1+x$ ist obere Schranke von A

Also: $a := \sup(A)$ existiert

Zeige: $a^n = x$

Ang: $a^n < x$

Es sei: finde $\varepsilon > 0$, s.d. $a + \varepsilon \in A$ $\nmid$

Dann: $a > 0 \Rightarrow c := \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{a^{n-k}}_{\geq 0} \geq \binom{n}{n} = 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} > 0 \quad \Rightarrow \underbrace{x - a^n}_{> 0} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \cdot (x - a^n) > 0$$

Setze: $\varepsilon := \min \left\{ \frac{x - a^n}{c}, 1 \right\} > 0$

$$\Rightarrow a^n + c \cdot \varepsilon \leq a^n + c \cdot \frac{x - a^n}{c} = x$$

Es sei: $0 < \varepsilon \leq 1 \Rightarrow \forall k \geq 1: 0 < \varepsilon^k \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a + \varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon^k = a^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \underbrace{\varepsilon^k}_{\leq \varepsilon} \\ &\stackrel{\text{B.L.S.}}{\leq} a^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon = a^n + \underbrace{c}_{=c} \cdot \varepsilon \leq x \end{aligned}$$

$\Rightarrow a + \varepsilon \in A \nmid a = \sup(A)$

Also: $a^n \geq x$

Auf: $a^n > x$

Ziel: Finde $\varepsilon > 0$ und $y \in A$, s.d. $y^n > (a - \varepsilon)^n \geq x$

Gegeben: $a^n > x > 0$ und $a \geq 0 \Rightarrow a > 0$

$\Rightarrow \frac{a \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n} > 0$

Setze: $\varepsilon := \min \left\{ \frac{a \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n}, a \right\} > 0$

$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{a} \leq 1 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{a} \geq -1$

$\Rightarrow \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right)^n = \left(1 + \left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{a}\right) = 1 - n \cdot \frac{\varepsilon}{a}$

Bernoulli:

$\Rightarrow a^n \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right)^n \geq a^n \cdot \left(1 - n \cdot \frac{\varepsilon}{a}\right) \geq a^n \cdot \left(1 - \frac{a \cdot (a^n - x)}{a^n}\right)$

$\parallel$ $\parallel$
 $(a - \varepsilon)^n$ $a^n - (a^n - x)$
 $\parallel$ $\parallel$
 x

Behauptung: $a - \varepsilon < a = \sup(A)$

$\Rightarrow \exists y \in A : a - \varepsilon < y$

$\Rightarrow y^n > (a - \varepsilon)^n \geq x \quad \downarrow y \in A$

Also: $a^n = x$

□

§ 10 Der Körper der komplexen Zahlen

A) Die Arithmetik der komplexen Zahlen

Satz 10.2

Die Menge $\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ wird durch

$$(x, y) + (u, v) := (x+u, y+v)$$

und

$$(x, y) \cdot (u, v) := (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$$

ein Körper, der Körper der komplexen Zahlen.

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Bem. 10.3

- ① . $0_{\mathbb{C}} := (0, 0) \in \mathbb{C}$ ist das Neutrale der Addition
 . $1_{\mathbb{C}} := (1, 0) \in \mathbb{C}$ ist das " " Multiplikation
 . $(-x, -y)$ ist das additive Inverse von (x, y)
 . $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ ist das multiplikative Inverse von $(x, y) \neq (0, 0)$

② $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \longmapsto (x, 0)$ erfüllt

- $i(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = i(x) \cdot i(y)$
- $i(x+y) = (x+y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = i(x) + i(y)$
- $i(1) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}$
- i ist injektiv

Also: wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $i(\mathbb{R}) = x\text{-Achse}$,
d.h. $x\text{-Achse}$ ist Teilkörper von $\mathbb{C}$, der isomorph
zu $\mathbb{R}$ ist.

© Setze: $i := (0, 1)$

$$\Rightarrow i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

" $i(-1) \stackrel{!}{=} -1$

Identifikation: $(x, 0) = i(x) \stackrel{!}{=} x$

$$\Rightarrow (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \stackrel{!}{=} x + i \cdot y$$

Damit sind die Multiplikationen:

$$(x+iy) \cdot (u+iv) = x \cdot u + iy \cdot iv + x \cdot iv + iy \cdot u$$

$$= xu + i^2 yv + i \cdot xv + i \cdot yu = (xu - yv) + i \cdot (xv + yu)$$

Damit: $\mathbb{C} = \{x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Lemma 10.4

Es gibt keine Totalordnung " $\leq$ " auf $\mathbb{C}$, so daß $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper ist.

Beweis:

Ang. daz.

$$\Rightarrow \underset{\text{g.17}}{0} < \underset{\text{g.17}}{i^2} = -1 < \underset{\text{g.17}}{0} \quad \downarrow \quad \boxed{\text{K}}$$

Def. 10.5:

① $| \cdot | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x+iy \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$ heißt **Betragsfunktion** auf $\mathbb{C}$ und $|z|$ heißt der **Absolutbetrag** von $z \in \mathbb{C}$.

Beachte: $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \sqrt[3]{x^2}$

② $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x+iy \longmapsto x-iy$ heißt die **komplexe Konjugation** und $\bar{z}$ heißt das **komplexe Konjugierte** von $z \in \mathbb{C}$.

- ③ $\text{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: x+iy \mapsto x$ heißt der **Realteil** und
 $\text{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}: x+iy \mapsto y$ " " **Imaginärteil**.

Bsp. 10.6:

Sei $z = i - 1 = (-1) + 1 \cdot i = (-1) + i$

$\Rightarrow \text{Re}(z) = -1, \quad \text{Im}(z) = 1, \quad \bar{z} = (-1) + (-1) \cdot i = -1 - i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = (-1 + i) \cdot (-1 - i) = (-1)^2 - (-1) = 2 = |z|^2$

Lemma 10.7 (Rechenregeln in $\mathbb{C}$) Sei $z, w \in \mathbb{C}$.

① $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ Betrag ist multiplikativ

② $|z + w| \leq |z| + |w|$ Dreiecksungleichung

$| |z| - |w| | \leq |z + w|$

③ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ Definition des Betrages

④ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ ⑤ $z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

⑥ $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ⑦ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

⑧ $\overline{\bar{z}} = z$ ⑨ $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

⑩ $\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ⑪ $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ⑫ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

Beweis: ⑤ 2. gelang + ③ - ④ : Übungsaufgabe

① Sei $z = x + iy, w = u + iv$

$\Rightarrow |z \cdot w|^2 = |(xu - yv) + i(xv + yu)|^2 = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$
 $= x^2u^2 - 2xu yv + y^2v^2 + x^2v^2 + 2xv yu + y^2u^2$
 $= x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2 = (x^2 + y^2) \cdot (u^2 + v^2) = |z|^2 \cdot |w|^2$
 $\stackrel{2.3}{\Rightarrow} |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad |z+w|^2 &\stackrel{(1)}{=} (z+w) \cdot \overline{(z+w)} \stackrel{(2)}{=} (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\
 &= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = |z|^2 + (z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot w}) + |w|^2 \\
 &\quad \textcircled{3} \textcircled{4} \\
 &\stackrel{(1)}{=} |z|^2 + 2 \cdot \underbrace{\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})}_{\leq |z \cdot \bar{w}|} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2 \cdot |z \cdot \bar{w}| + |w|^2 \\
 &\stackrel{(2)}{=} |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |\bar{w}| \cdot |w| \stackrel{(2)}{=} |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 \\
 &= (|z| + |w|)^2 \\
 \Rightarrow \quad |z+w| &\leq |z| + |w|
 \end{aligned}$$

8.77 10.8:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad z &= 3 + 2i, \quad w = 5 - i \\
 \Rightarrow \quad & \cdot z \cdot w = (3 \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + i(3 \cdot (-1) + 2 \cdot 5) = 17 + 7i \\
 & \cdot |w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \\
 & \cdot \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{1}{26} \cdot (3 + 2i) \cdot (5 + i) \\
 & \quad = \frac{1}{26} \cdot ((3 \cdot 5 - 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 5)i) = \frac{1}{26} \cdot (13 + 13i) \\
 & \quad = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad z &= 3 + 4i, \quad w = 5 - 12i \\
 \Rightarrow \quad & \cdot z + w = (3 + 5) + (4 - 12)i = 8 - 8i \\
 & \cdot |z + w| = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{2} \cdot 8 < 2 \cdot 8 = 16 < 18 \\
 & \quad = 5 + 13 = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5^2 + (-12)^2} = |z| + |w| \\
 & \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(3 + 4i) + (3 - 4i)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 = \operatorname{Re}(z)
 \end{aligned}$$

B) Geometrische Interpretation der Arithmetik in $\mathbb{C}$

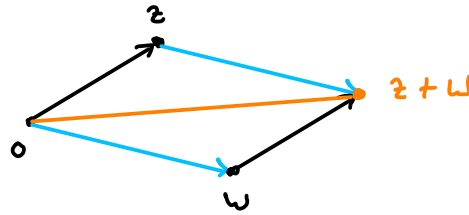
Bemerkung 10.9

(a) Addition in $\mathbb{C} \hat{=}$ Vektoraddition

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$w = u + iv = (u, v)$$

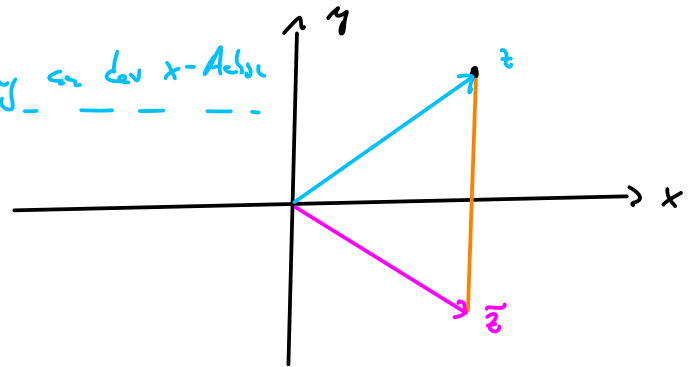
$$\Rightarrow z + w = (x+u) + i(y+v) \\ = (x+u, y+v)$$



(b) Komplexe Konjugation = Spiegelung an der x-Achse

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$\Rightarrow \bar{z} = x - iy = (x, -y)$$



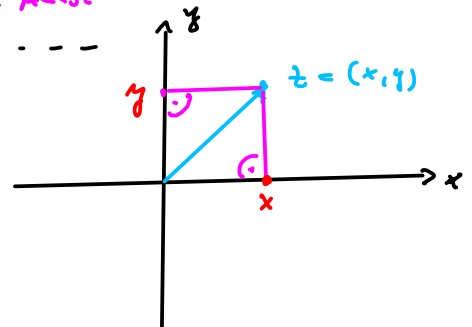
(c) Realteil = orthogonale Projektion auf die x-Achse

Imaginärteil = " " " " y-Achse

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

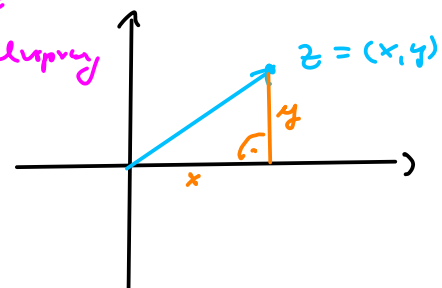


(d) Betrag von z = Länge des Vektors z
= Abstand von z zum Ursprung

$$z = x + iy = (x, y)$$

$$\Rightarrow (\text{Länge von } z)^2 = x^2 + y^2$$

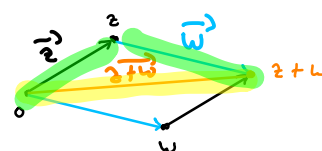
$$= \text{Länge von } z = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



(e) Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Länge von $z+w$ " Länge z " Länge w



Direkt von 0 nach $z+w$ zu gehen ist kürzer als den Umweg über z zu machen.

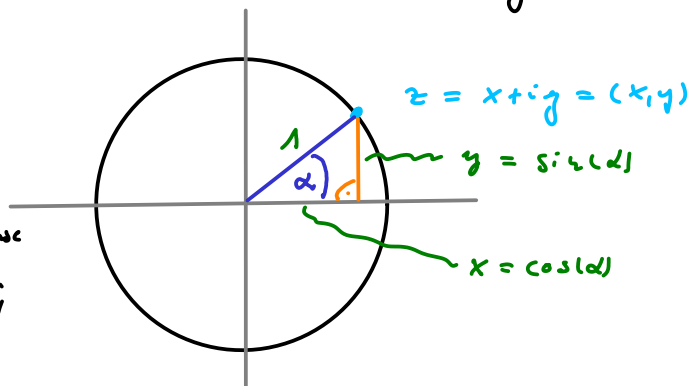
⑧ Menge der Punkte vom Betrag 1

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

= Kreis vom Radius 1 um den Ursprung

Beachte:

der Winkel α , den die Strecke $\overline{Oz}$ mit der x-Achse einschließt, legt z eindeutig fest.

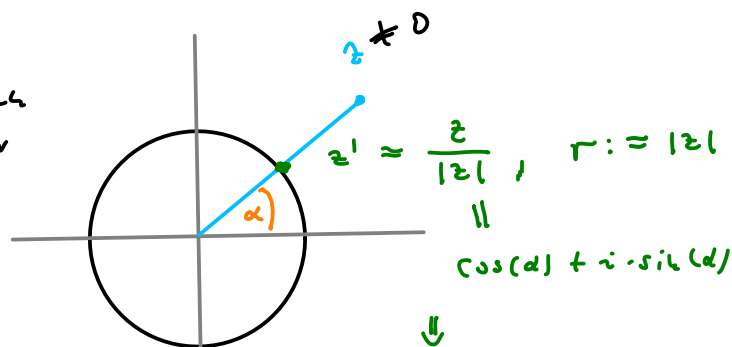


Nämlich: $z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$

⑨ Polarkoordinaten

$\arg(z) := \alpha =$ Winkel, den $\overline{Oz}$ mit der x-Achse einschließt

= Argument von z



Damit: z ist eindeutig festgelegt durch $|z|$ und $\arg(z)$

Notation: $(|z|, \arg(z)) = (r, \alpha)$ heißen die Polarkoordinaten von z

⑩ Multiplikation zweier komplexer Zahlen

Seien $z = |z| \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$, $w = |w| \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot \left((\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)) \right) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left(\underbrace{(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))}_{\cos(\alpha + \beta)} + i \cdot \underbrace{(\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta))}_{\sin(\alpha + \beta)} \right) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \left(\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta) \right) \end{aligned}$$

Kapitel II: Eindimensionale Analysis

Generalvoraussetzung: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

§ 11 Folgen und ihre Grenzwerte

A) Konvergente Folgen

Def. 11.1:

Eine **Folge** in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$.

Bem. 11.2:

① Eine Folge $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ ist eindeutig festgelegt durch ihre Bilder $a_n := \alpha(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Schreibe deshalb statt α auch $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$,
d.h. wir schreiben die Folge als die Familie der Bilder.

② Manchmal möchte man eine Folge nicht beim Index 0 starten lassen, sondern bei einem anderen Wert $k \in \mathbb{N}$:

$(a_n)_{n \geq k}$ steht dann für die Abb. $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}; n \mapsto a_{n+k}$.

Bsp. 11.3:

① Sei $c \in \mathbb{K}$. Dann ist $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}; n \mapsto c$ ist die **konstante Folge** zum Wert c , d.h. $a_n = \alpha(n) = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$
d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$.

② Sei $q \in \mathbb{K}$. Dann ist $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}; n \mapsto q^n$ ist die **geometrische Folge** zu q , d.h. $a_n = \alpha(n) = q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

② Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ beginnt beim Index 1

Def. 11.4:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$.

① a heißt **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wir sagen dann auch, die Folge **konvergiert** gegen a

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$

② $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent** $:\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{K} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

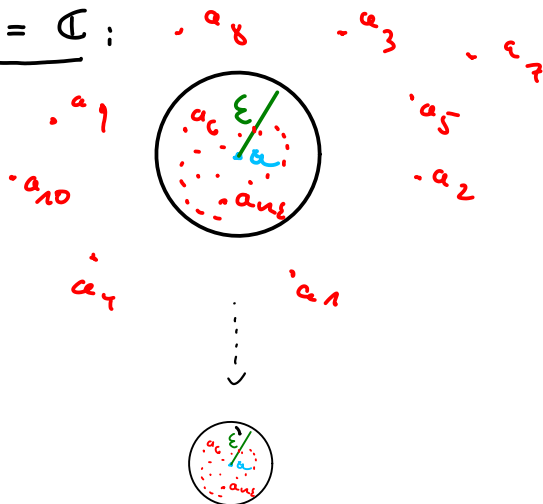
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **divergent** $:\Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{K} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

③ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge** $:\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Was bedeutet die Bedingung:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon ?$$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} :$



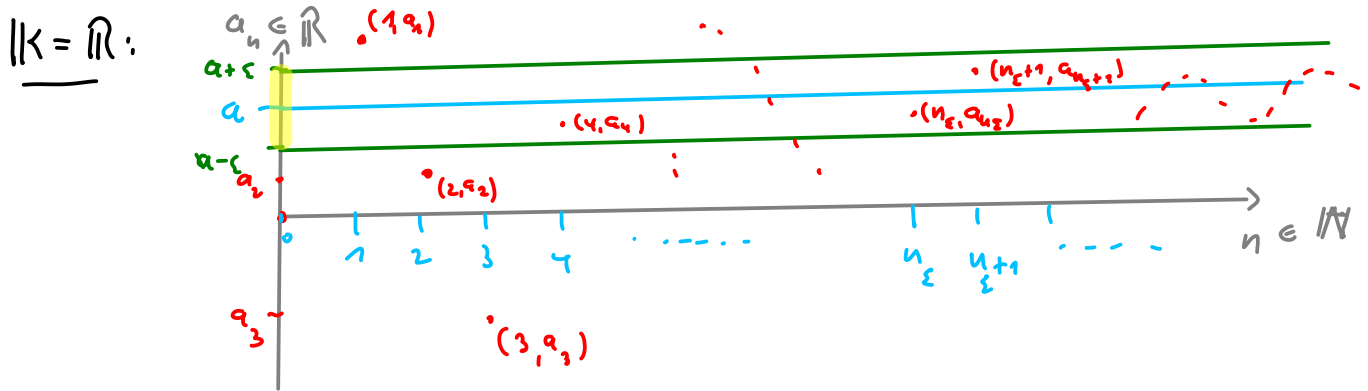
Für jedes ε gilt:

ab einem gewissen Index n_ε liegen alle Folgenglieder im Kreis mit Radius ε um a !

Wenn ε klein wird, wird n_ε in der Regel größer sein!

Bei immer kleiner werdenden ε müssen die Folgenglieder immer näher an a herankommen !!!

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:



Beispiel 11.5

① Konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}}$;

Beh: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - c| < \varepsilon$

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze: $n_\varepsilon := 0$. Sei $n \geq n_\varepsilon$ gegeben.

$$\Rightarrow |a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

□

② Beh: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - 0| < \varepsilon$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Kov. g. 4 $\Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

Sei $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$

□

③ Beh: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent



Beweis:

Sei $a \in \mathbb{R}$.

z.z.: a ist kein Grenzwert von $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

d.h. $\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon)$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N} \exists n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \geq \varepsilon$

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gegeben.

Ang: $\forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$.

$$2 = |(-1)^{n_\varepsilon} - (-1)^{n_\varepsilon+1}| = |a_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon+1}| = |a_{n_\varepsilon} - a + a - a_{n_\varepsilon+1}|$$

$$\leq \underbrace{|a_{n_\varepsilon} - a|}_{< \frac{1}{2}} + \underbrace{|a - a_{n_\varepsilon+1}|}_{< \frac{1}{2}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{⚡}$$

Also: $\exists n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \geq \varepsilon$

□

Lemma 11.6:

Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$. Dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Beweis:

z.z.: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |q^n - 0| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Setze: $x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \overbrace{x \cdot \varepsilon}^{> 0}$

Sei $n \geq n_\varepsilon$. Beachte: $(1+x)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} (1+n \cdot x) > 0$

$$\Rightarrow |q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+n \cdot x} < \frac{1}{n \cdot x} \leq \frac{1}{n_\varepsilon \cdot x} < \frac{x \cdot \varepsilon}{x} = \varepsilon$$

□

Bem. 11.7:

$$a_n \rightarrow a, \text{ d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

$$a_n - a \rightarrow 0, \text{ d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |(a_n - a) - 0| < \varepsilon$$

$$|a_n - a| \rightarrow 0, \text{ d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : ||a_n - a| - 0| < \varepsilon$$

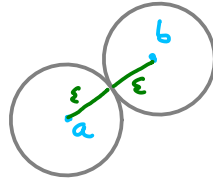
Prop. 11.8:

Der Grenzwert einer konvergenten Folge in $\mathbb{K}$ ist eindeutig.

Beweis:

Ang.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ mit $a \neq b$

Setze: $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$



$$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

und

$$\exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |a_n - b| < \varepsilon$$

Setze: $n := \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\} \geq n_\varepsilon, n'_\varepsilon$

$$\Rightarrow |a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq \underbrace{|a - a_n|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|a_n - b|}_{< \varepsilon} < 2 \cdot \varepsilon \stackrel{||}{=} |a-b|$$

□

B) Beschränkte Folgen

Def. 11.9: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **beschränkt** $(\Leftrightarrow) \{ |a_n| \mid n \in \mathbb{N} \}$ ist **beschränkt** in $\mathbb{R}$

$$(\Leftrightarrow) \exists s \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq s$$

Ein solches s heißt eine **Schranke** für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bsp. 11.10:

② $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ ist konvergent und beschränkt,

denn: $|\frac{1}{n}| \leq 1 \quad \forall n \geq 1.$

③ $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent und beschränkt,

denn: $|(-1)^n| = 1 \leq 1 \quad \forall n \geq 1$

Satz 11.10:

Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist auch beschränkt.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

Setze: $\varepsilon := 1.$

$$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon = 1$$

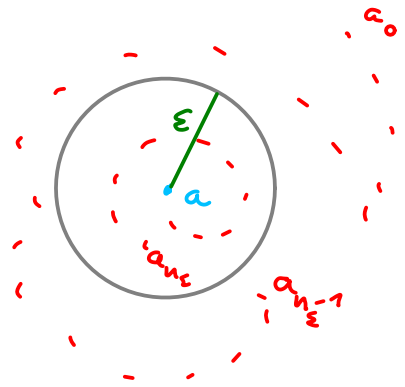
Setze: $S := \max\{|a|+1, |a_0|, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}|\}$

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

1. Fall: $n < n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leq S$

2. Fall: $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon = 1} + |a| < 1 + |a| \stackrel{11}{\leq} S$

Also: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.



Bsp. 11.12:

① Die Umkehrung von 11.11 gilt nicht!

d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\not\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent
11.10B

② Sei $k \geq 1 \Rightarrow (n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt,
und also auch nicht konvergent!

© Sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| > 1$.

Dann ist $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt und nicht konvergent.

Dann:

Ang: $s > 0$ ist Schranke für $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Setze: $x := |q| - 1 > 0$

$\Rightarrow_{9.3} \exists n \in \mathbb{N} : s < n \cdot x$

$\Rightarrow |q^n| = (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x > n \cdot x > s$
Bernoulli:

$\hookrightarrow s$ Schranke für $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Also: $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt und wegen $|q| > 1$ nicht konvergent. $\square$

Lemma 11.13:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$.

Beweis:

• $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow \exists s > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < s$

• Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Beachte: $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{s}} : \forall n \geq N_{\frac{\varepsilon}{s}} : |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{s}$

Setze: $n_{\varepsilon} := N_{\frac{\varepsilon}{s}}$.

Sei $n \geq n_{\varepsilon}$.

$\Rightarrow |a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n - 0 \cdot b_n| = \overbrace{|a_n - 0|}^{< \frac{\varepsilon}{s}} \cdot \overbrace{|b_n|}^{< s} < \frac{\varepsilon}{s} \cdot s = \varepsilon$

Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$

$\square$

Bsp. 11.15:

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ und $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

$\Rightarrow \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

C) Grenzwertsätze

Proposition 11.15: (Grenzwertsätze)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$.

① dann: ② $a_n + b_n \rightarrow a + b$ und $a_n - b_n \rightarrow a - b$

③ $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

④ $|a_n| \rightarrow |a|$

⑤ Wenn $b \neq 0$, dann: $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : b_n \neq 0$
und $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ ist konvergent mit $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Beweis:

② Sei $\varepsilon > 0$

$a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n'_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n \geq n'_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$b_n \rightarrow b \Rightarrow \exists n''_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n \geq n''_{\frac{\varepsilon}{2}} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := \max\{n'_{\frac{\varepsilon}{2}}, n''_{\frac{\varepsilon}{2}}\}$. Sei $n \geq n_\varepsilon \geq n'_{\frac{\varepsilon}{2}}, n''_{\frac{\varepsilon}{2}}$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b$$

Analog: $a_n - b_n \rightarrow a - b$

③ $a_n \rightarrow a \Rightarrow (a_n - a) \rightarrow 0$
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\left. \vphantom{\begin{matrix} a_n \rightarrow a \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow (a_n - a) \cdot b_n \rightarrow 0$

$b_n \rightarrow b \Rightarrow (b_n - b) \rightarrow 0$
 $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow (a)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\left. \vphantom{\begin{matrix} b_n \rightarrow b \\ (a)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow (b_n - b) \cdot a \rightarrow 0$

④ Damit: $a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n \cdot b_n - a \cdot b_n) + (a \cdot b_n - a \cdot b)$

$$= \underbrace{(a_n - a) \cdot b_n}_{\downarrow 0} + \underbrace{(b_n - b) \cdot a}_{\downarrow 0} \xrightarrow{②} 0 + 0 = 0$$

Also: $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

© Sei $\varepsilon > 0$.

Wird $a_n \rightarrow a$, gilt: $\exists u_\varepsilon : \forall n \geq u_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Sei $n \geq u_\varepsilon$.

$$\Rightarrow | |a_n| - |a| | \underset{\text{D.7}}{\leq} |a_n - a| < \varepsilon$$

Also: $|a_n| \rightarrow |a|$

④ Sei $b \neq 0$.

Setze $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$

$$\Rightarrow \exists u_0 : \forall n \geq u_0 : |b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2}$$

Zeige: $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq u_0$

$$|b| = |b_n + (b - b_n)| \leq |b_n| + \underbrace{|b - b_n|}_{< \varepsilon} < |b_n| + \varepsilon = |b_n| + \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|b|}{2} = |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq u_0$$

Frage: $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ wobei $(\frac{1}{b_n})_{n \geq u_0}$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Beachte: $b_n \rightarrow b \Rightarrow \exists u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} : \forall n \geq u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} : |b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}$

Setze: $u_\varepsilon := \max \left\{ u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}, u_0 \right\}$.

Sei $n \geq u_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n \cdot b} \right| = \underbrace{\left| \frac{1}{b_n} \right|}_{< \frac{2}{|b|}} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}} < \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2} = \varepsilon$$

wird $n \geq u'_{\frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}}$

Also: $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

• Damit: ⑥ $\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$

Bsp. 11.16:

$$\textcircled{a} \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

$$\textcircled{b} \quad a_n = \frac{7n^2 + 3}{4n^2 + n + 1} = \frac{(7n^2 + 3) \cdot \frac{1}{n^2}}{(4n^2 + n + 1) \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{7 + \frac{3}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

$\frac{7}{4} = \frac{7+0}{4+0+0}$

D) Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Prop. 11.17 (Einschachtelungssatz)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$
mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

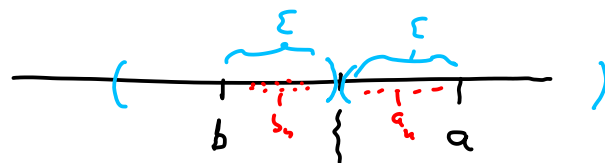
$$\textcircled{a} \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \quad \Rightarrow \quad a \leq b$$

$$\textcircled{b} \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \wedge \quad a = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

Beweis:

$$\textcircled{a} \quad \underline{\text{Ang:}} \quad b < a.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0}$$



$$b_n \rightarrow b \Rightarrow \exists n'_\varepsilon : \forall n > n'_\varepsilon : |b_n - b| < \varepsilon \Rightarrow b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n''_\varepsilon : \forall n > n''_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

$$\text{Wähle } n = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n_0\}.$$

$$\Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad a - b < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{a-b}{2} = a - b \quad \downarrow$$

Also $b \geq a$.

⑥ Zu 11.18: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |c_n - a| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

$b_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n''_\varepsilon : \forall n \geq n''_\varepsilon : |b_n - a| < \varepsilon$

Setze: $n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n_0\}$.

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$

$\Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$

Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

□

Bsp. 11.18:

Sei $k \geq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$$

Diagram showing limits as $n \rightarrow \infty$:

- Left side: $\frac{1}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (blue arrow, labeled 11.17)
- Middle: $\frac{1}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (red arrow, labeled 11.17)
- Right side: $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (blue arrow, labeled 11.12)

Def. 11.20

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend

(bzw. monoton fallend), falls: $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

Bsp. 11.201

$(n)_{n \in \mathbb{N}}$

ist monoton wachsend und divergent.

$(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$

ist monoton fallend und konvergent.

Satz 11.21 (Bolzano-Weierstraß)

Jede monoton wachsende bzw. fallende, beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$,
und sei s eine obere Schranke für die Folge.

$\Rightarrow A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nach oben durch s beschränkt.

$\Rightarrow a := \sup(A)$ existiert!

Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$\Rightarrow a - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A

$\Rightarrow \exists a_{n_\varepsilon} \in A : a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$

Sei $n \geq n_\varepsilon$.

$\Rightarrow a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq \sup(A) = a < a + \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Analog: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ □

Bem. 11.22:

Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Falls A nach oben beschränkt ist, dann:

$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monot. wach. Folge in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(A)$.

(b) Falls A nach unten beschränkt ist, dann:

$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monot. fallend in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(A)$.

Beweis:

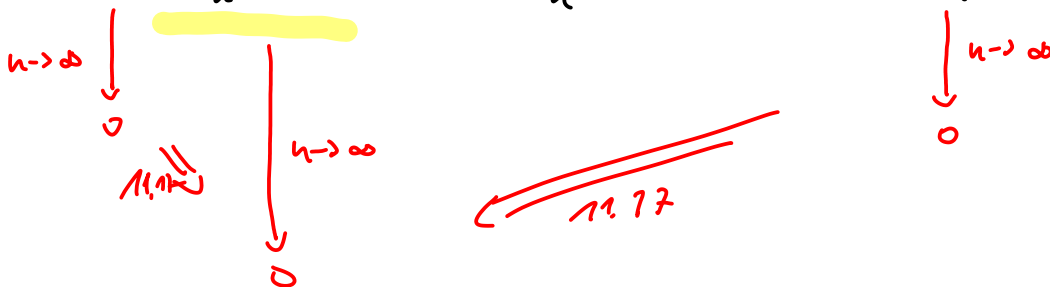
(a) Wähle $a_0 \in A$ beliebig, $a := \sup(A)$.

Für $n \geq 1$ ist $\varepsilon := \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow a - \varepsilon = \sup(A) - \varepsilon$
ist keine obere Schranke von A

$$\Rightarrow \exists b \in A : a - \varepsilon < b (\leq a)$$

$$\text{Setze: } a_n := \max\{b, a_{n-1}\}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |a_n - a| = a - a_n \leq a - b < \varepsilon = \frac{1}{n}$$



$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

(b) analog.

(5)

Bsp. 11.23 (Rekursive Folge - Heron-Verfahren)

Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Setze: $a_0 := 1$

Definiere rekursiv: $a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right) > 0$ für $n \geq 0$

Beh: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{c}$

E) Der Satz von Bolzano - Weierstraß

Def. 11.24

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen.

Dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
" $(a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$

ÜA:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$$

Bsp. 11.25:

$(\frac{1}{n^2})_{n \geq 1}$ ist eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$.

Satz von Bolzano - Weierstraß 11.26

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis:

1. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

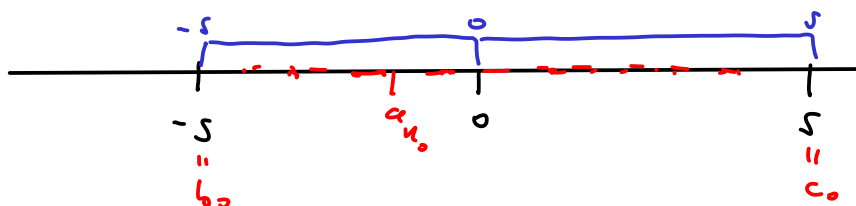
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists s > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : -s \leq a_n \leq s$$

Setze: $b_0 := -s$ und $c_0 := s$, d.h. $[b_0, c_0] = [-s, s]$

enthält unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Setze: $n_0 := 0$ und $a_{n_0} \in [b_0, c_0]$, d.h. $b_0 \leq a_{n_0} \leq c_0$.



Teile $[b_0, c_0]$ in zwei gleich große Hälften: $[b_0, \frac{b_0+c_0}{2}]$ und $[\frac{b_0+c_0}{2}, c_0]$

$\Rightarrow$ mindestens eines der Teilmintervalle enthält unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Wähle ein solches und nenne die Intervallgrenzen b_1 und c_1 , d.h. $[b_1, c_1] \subseteq [b_0, c_0]$

Wähle ein $a_{n_1} \in [b_1, c_1]$ mit $n_1 > n_0$, das gibt, weil $[b_1, c_1]$ so viele a_n 's enthält.

Teile $[b_1, c_1]$ wieder in zwei gleich große Hälften $[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}]$ und $[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1]$ und wähle ein davon, das so viele a_n 's enthält, nenne das Intervall $[b_2, c_2]$ und wähle $a_{n_2} \in [b_2, c_2]$ mit $n_2 > n_1$.

Fahre so fort und konstruiere rekursiv:

- $[b_k, c_k]$ mit $c_k - b_k = \frac{1}{2} \cdot (c_{k-1} - b_{k-1})$
- a_{n_k} mit $b_k \leq a_{n_k} \leq c_k$ und $n_k > n_{k-1}$

D.h. $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Zeige: ① $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

② $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ & $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind konvergent mit $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$.

Zu ②:

klar: • $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend & $b_0 \leq b_k \leq c_0$
• $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ " " fallend & $b_0 \leq c_k \leq c_0$

$\Rightarrow$ Monotonie $\exists b \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$
Krit. $\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = c$

$$\text{zu dem: Länge von } [b_k, c_k] = c_k - b_k \quad \frac{2^k}{2^k}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \text{Länge } [b_{k-1}, c_{k-1}] = \frac{1}{2} \cdot (c_{k-1} - b_{k-1}) = \frac{c_k - b_k}{2^k}$$

$$\Rightarrow c - b \leq c_k - b_k = \frac{2^k}{2^k} = (2^k) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow c - b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = b$$

$$\text{zu ①: Einschlusskriteriumssatz} + b_k \leq a_{n_k} \leq c_k \quad \forall k \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

$$\text{②}$$

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$.

$$\Rightarrow_{10.7} | \operatorname{Re}(a_n) | \leq | a_n | \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d.h. $(\operatorname{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow_{1. \text{ Fall}} \exists \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ s.d. } \operatorname{Re}(a_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$$

$$10.7 \Rightarrow | \operatorname{Im}(a_{n_k}) | \leq | a_{n_k} | \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

d.h. $(\operatorname{Im}(a_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow_{1. \text{ Fall}} \exists \text{ TF } (a_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}} \text{ s.d. } \operatorname{Im}(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y$$

$$\Rightarrow_{\substack{\text{ÜA in} \\ 11.24}} \operatorname{Re}(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$$

$$\text{Daher: } a_{n_{k_j}} = \operatorname{Re}(a_{n_{k_j}}) + i \cdot \operatorname{Im}(a_{n_{k_j}}) \xrightarrow[\substack{\text{ÜA} \\ j \rightarrow \infty}]{} x + i \cdot y$$

Bsp. 11.27:

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

hat die

beschränkt und divergent,

$$((-1)^{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (1)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist eine konvergente}$$

Teilfolge!

Satz 11.28:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $[a, b]$.

Dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in [a, b].$$

Beweis:

Anz.: $c := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \notin [a, b]$.

1. Fall: $c > b \Rightarrow \varepsilon := \frac{c-b}{2} > 0$

$\forall n. \Rightarrow a_n \rightarrow c \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - c| < \varepsilon$

$$\Rightarrow 0 < c - b \leq c - a_{n_\varepsilon} = |a_{n_\varepsilon} - c| < \varepsilon = \frac{c-b}{2}$$

$a_{n_\varepsilon} \in [a, b]$

⚡

2. Fall: $c < a$, analog

⚡

F) Das Cauchy-Kriterium

Def. 11.29:

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon$.

Satz 11.30 (Cauchy-Kriterium)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

Dann: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **konvergent** $\Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **Cauchy-Folge**.

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konv. Folge mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Setze: $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sei $m > n \geq n_\varepsilon$.

$$\Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

" $\Leftarrow$ " Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

① Zeige: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Setze $\varepsilon = 1 > 0$

$$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall m \geq n_\varepsilon : |a_m - a_{n_\varepsilon}| < \varepsilon = 1$$

Setze $S := \max\{|a_{n_\varepsilon}| + 1, |a_0|, \dots, |a_{n_\varepsilon-1}|\}$

$$\Rightarrow \text{1. Fall: } n < n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| \leq S$$

$$\text{2. Fall: } n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n| = |a_n - a_{n_\varepsilon} + a_{n_\varepsilon}| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_\varepsilon}|}_{< 1} + |a_{n_\varepsilon}| < 1 + |a_{n_\varepsilon}| \leq S$$

Also: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

② BW 11.26 $\Rightarrow \exists \text{ TF } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

③ Z.z.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF $\Rightarrow \exists N_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall m > n \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

• $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. gegen $a \Rightarrow \exists k_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall k \geq k_{\frac{\varepsilon}{2}} : |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze: $n_\varepsilon := N_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sei $n \geq n_\varepsilon$.

Wähle ein $k \geq k_{\frac{\varepsilon}{2}}$, s.d. $n_k \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_n - a| &= |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \\ &\leq \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

□

Bsp. 11.31:

Sei $1 \neq q \in \mathbb{K}$ mit $|q| = 1$. Dann ist $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Z.z.: $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist kein Cauchy-Folge.

d.h. $\neg (\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| < \varepsilon)$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon : \exists m > n \geq n_\varepsilon : |a_m - a_n| \geq \varepsilon$

Setze: $\varepsilon := |q - 1| > 0$. Sei $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben.

Setze: $m := n_\varepsilon + 1$ und $n := n_\varepsilon \Rightarrow m > n \geq n_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_m - a_n| &= |q^{n_\varepsilon+1} - q^{n_\varepsilon}| = \underbrace{|q^{n_\varepsilon}|}_{|q|^{n_\varepsilon} = 1^{n_\varepsilon} = 1} \cdot \underbrace{|q - 1|}_{= \varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow (q^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist kein CF} \end{aligned}$$

□

Bem. 11.32:

Behaupte: $a_0 := 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ für $n \geq 0$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $a_n \rightarrow \sqrt{2}$
 $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keinen GW in $\mathbb{Q}$

Abw: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine CF, weil sie als Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert ist!

G) Bestimmt divergente Folgen

Def. 11.33: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

① $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞

$\Leftrightarrow \forall s > 0 \exists n_s \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_s : a_n > s$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oder $a_n \rightarrow \infty$, ∞ heißt uneigentlicher GW d. Folge.

② $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen $-\infty$

$\Leftrightarrow \forall s < 0 \exists n_s \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_s : a_n < s$

Notation: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \rightarrow -\infty$, $-\infty$ heißt uneigentlicher GW d. Folge.

Bsp. 11.34:

① $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞

② $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent

Bem. 11.35:

① Rechenregeln: Sei $a \in \mathbb{R}$.

Definition:

$\left(\begin{array}{l} \cdot a + \infty := \infty, \quad a - \infty := -\infty \\ \cdot \text{falls } a > 0: \quad a \cdot \infty := \infty, \quad a \cdot (-\infty) := -\infty \\ \cdot \text{falls } a < 0: \quad a \cdot \infty := -\infty, \quad a \cdot (-\infty) := \infty \\ \cdot \frac{a}{\infty} := 0, \quad \frac{a}{-\infty} := 0, \quad \begin{array}{l} \infty + \infty := \infty, \quad \infty \cdot \infty := \infty \\ -\infty + (-\infty) := -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) := \infty \end{array} \end{array} \right)$

⑤ GW-Sätze in 11.15 verallgemeinern sich in verallgemeinertes Weise
auf unregelmäßige Grenzwerte mit Hilfe von (a)

z.B.:

- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + \infty = \infty$
- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{\infty} = 0$

⑥ Neue GW-Sätze:

- $a_n \rightarrow a \neq 0 \wedge b_n \rightarrow 0 \wedge \exists n_0: \forall n \geq n_0: b_n > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \infty$
- $a_n \rightarrow a \neq 0 \wedge b_n \rightarrow 0 \wedge \exists n_0: \forall n \geq n_0: b_n < 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot (-\infty)$
- $a_n \rightarrow a \neq 0 \wedge b_n \rightarrow 0 \wedge \nexists n_0: (\forall n \geq n_0: b_n < 0) \text{ oder } (\forall n \geq n_0: b_n > 0) \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist divergent}$

§ 12 Unendliche Reihen

A) Konvergenz unendlicher Reihen

Def. 12.1

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$.

① $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$ heißt **Partialsumme** von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$

② Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt die durch $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definierte **Reihe**.

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$

③ Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent**, wenn sie als Folge konvergent ist.

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ bezeichnet auch den Grenzwert der Reihe!

④ Reihen müssen nicht bei 0 starten:

$(a_k)_{k \geq n_0}$ und $s_n := \sum_{k=n_0}^n a_k \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k := (s_n)_{n \geq n_0}$

Bsp. 12.2:

Beh: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$

Bew:

$$\text{Beh: } \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - 0 = 1$$

Teleskopsumme

Bsp. 12.3 (Harmonische Reihe)

Bsp. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Beweis:

Satz: $n_k := 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{n_k} &= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{k}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow (S_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent

Lemma 12.4 (GW-Sätze für Reihen)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$, $a, b \in \mathbb{K}$.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot a_n) = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Zus.: alle Reihen sind k -konvergent!

Bemerkung: 11.15 + 11.17 (e)

B) Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Prop. 12.5 (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann **konvergent**,

wenn: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall m > n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$.

Beweis:

$$\text{Setze: } s_n := \sum_{k=0}^n a_k \quad \xRightarrow{m > n} \quad s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^m a_k \quad \xRightarrow{11.30} \text{ Beh.} \quad \square$$

Lemma 12.6:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$, dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$

d.h. die Folge der Restglieder ist eine Nullfolge.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\xRightarrow{12.5} \exists n'_{\varepsilon/2} : \forall m > n \geq n'_{\varepsilon/2} : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon/2$$

Halte n fest und lasse m variieren

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\parallel \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - 0 \right|$$

$$\forall n \geq n_{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0 \quad \square$$

Lemma 12.7: (Nullfolgenkriterium)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Beweis:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$ $\downarrow$
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

□

Bsp. 12.8:

① $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ ist divergent, weil $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \geq 1}$ keine Nullfolge ist.

② $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge $\not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

12.3
harmon. Reihe

Satz 12.9 (Geometrische Reihe)

$s_n \quad q \in \mathbb{K}$.

① $|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konvergent mit GW $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

② $|q| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist divergent.

Beweis:

① $s_n = \sum_{k=0}^n q^k \stackrel{7.12}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|q| < 1} \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$

② $|q| \geq 1 \Rightarrow (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge

$\stackrel{12.7}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergent

□

Satz 12.10 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$.

Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ist konvergent.

Beweis:

Satz: $s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot a_k$ für $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte die TF der geraden Partialsummen: $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_{2(n+1)} &= s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \\ &= s_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \leq s_{2n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Folge $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

Analog: Die TF der ungeraden Partialsummen $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend!

Zudem:

$$s_1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0$$

$\Rightarrow (s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sind beschränkt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \text{Monotonie-} \\ & \text{kr. 7. 12.11} \quad s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s, \quad s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s - t \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} \stackrel{12.7}{=} 0$$

$$\Rightarrow s - t = 0 \Rightarrow s = t$$

Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\cdot s_{2n} \rightarrow s \Rightarrow \exists n'_\varepsilon : \forall n \geq n'_\varepsilon : |s_{2n} - s| < \varepsilon$$

$$\cdot s_{2n+1} \rightarrow s \Rightarrow \exists n''_\varepsilon : \forall n \geq n''_\varepsilon : |s_{2n+1} - s| < \varepsilon$$

$$\text{Satz 12.1: } u_{\varepsilon} := \max\{2 \cdot u_{\varepsilon}', 2u_{\varepsilon}'' + 1\}.$$

$$\text{Sei } u \geq u_{\varepsilon}.$$

$$\Rightarrow |S_n - S| < \varepsilon$$

$$\text{Also: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

□

Bsp. 12.11 (Alternierende harmonische Reihe)

$(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ ist eine monoton fallende Nullfolge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \text{ ist konvergent}$$

$$\text{Zudem: } -1 = S_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \leq S_2 = -\frac{1}{2}$$

Lemma 12.22 (Umklammern in Reihen)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$ und sei

$0 = k_0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ eine aufsteigende Folge nat. Zahlen.

$$\text{Satz 12.2: } b_n := \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \dots + a_{k_{n+1}-1}.$$

$$\text{Dann ist } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ ist konvergent mit GW } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis:

$$\text{Satz 12.1: } s_n := \sum_{k=0}^n a_k \text{ und } t_n := \sum_{k=0}^n b_k.$$

$$\Rightarrow t_n = s_{k_{n+1}-1} \Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist eine TF von } (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert

□

C) Absolut konvergente Reihen

Def. 12.13

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv.

Dann heißt $(a_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}, \dots)$

eine **Umordnung** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die

Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine **Umordnung** von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bsp. 12.14i

Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent!

Betrachte folgende Umordnung der Reihe:

$$\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right) + \frac{1}{16} + \dots$$

Annotations:
- Green arrows point to the first term of each pair: $1, 3, 5, 7, \dots$. Text: "Jedes n ist ungerade".
- Blue arrows point to the second term of each pair: $2, 6, 10, 14, \dots$. Text: "Jedes $2n$ ist gerade".
- Purple arrows point to the terms $1/4, 1/8, 1/12, 1/16, \dots$. Text: "Jedes $4n$ durch 4 teilbar".

Lemma 12.22

falls die
Reihe
konvergiert

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{14}\right) + \frac{1}{16} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \quad \text{d.h. die GU der altern. harm. Reihe hat sich durch Umordnen verdoppelt!}$$

Fazit: Die GU von konvergenten Reihen kann sich durch Umordnen ändern!

Def. 12.15:

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ **konvergiert**

$\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist **beschränkt**, mit $t_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$

Bsp. 12.16:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ist konvergent, und absolut konvergent

Lemma 12.17:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent** $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **konvergent**

Beweis:

Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall m > n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$
(dann fertig mit Cauchy-Kriterium).

Vor. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ **konvergent**

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\Rightarrow \exists n_{\varepsilon} : \forall m > n \geq n_{\varepsilon} : \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| < \varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|$$

Δ -Ugl.

□

Umordnungssatz 12.18:

Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent mit dem selben Grenzwert.

Bewijs:

S Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv.

① Zurip: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{G(n)})$ ist konvergent mit GG 0.

d.l. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=0}^n (a_k - a_{d(k)}) - 0 \right| < \varepsilon$

$\Sigma_i \quad \varepsilon > 0$ gegeben.

Vor. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

$$\Rightarrow \exists n' : \forall m > n \geq n' : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{l=k+1}^n |a_l|$$

Weil ϕ surjektiv und $\{0, 1, \dots, n'_2\}$ endlich ist

$$\Rightarrow \exists n_i : \{0, 1, \dots, n_i'\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n_i')\}$$

$$\int x_i \quad \text{und} \quad n \geq n_{\Sigma}. \quad (\text{Bemerkung: } n_{\Sigma} \geq n'_i)$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=0}^n (\underbrace{a_k}_{\substack{\Delta - u_{\text{gl.}} + 1 \cdot \text{Fehl.}} - \underbrace{a_{d(k)}}_{\substack{+ 2 \cdot \text{Fehl.}}}) - o \right| \leq \sum_{i=u_{\varepsilon}'+1}^m |a_i| < \varepsilon$$

Wie oft kommt
ein a. höchstens vor?

Wie oft werden Löhne?

1. Fall: $i \leq n-1$ $\Rightarrow i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq \underbrace{\{d(0), \dots, d(n-1)\}}_{\{d(0), \dots, d(n)\}}$

⇒ a_i kommt unter den a_j 's und den $a_{d(i)}$'s jeweils genau einmal vor

$\Rightarrow$ in der Summe haben sich die beiden versch!

2. Fall: $i \geq u_2' \Rightarrow$ a: kommt doppelt vor und hebt sich raus oder
kommt nur 1x positiv oder negativ vor

② GV-sätze für Reihen

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - (a_n - a_{d(n)})) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{d(n)})}_{=0 \text{ (GV)}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

||

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{d(n)}$$

③ Wende ① & ② auf $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_{d(n)}|$ ist konvergent
 $\downarrow$
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{d(n)}$ ist abs. konvergent $\square$

D) Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz

Satz 12.19 (Majorantenkriterium)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen in $\mathbb{K}$.

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist und $\exists n_0: \forall n \geq n_0: |a_n| \leq |b_n|$,

dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Wir nennen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dann eine konvergente Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis.

Satz: $s_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$

$\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt durch $s_{n_0} + \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$

$\Rightarrow$ Beh $\square$

Prop. 12.20 (Minorantenkriterium)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen in $\mathbb{R}$.

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergiert und $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq b_n \geq 0$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Wir nennen $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beweis:

Satz 1: $t_n := \sum_{k=0}^n b_k$

$\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, weil $b_k \geq 0 \forall k$

Var. $\Rightarrow (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent $\xRightarrow{11.21} (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Zudem: $s_n := \sum_{k=0}^n a_k \geq \sum_{k=0}^n b_k = t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt $\xRightarrow{11.11} (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ □

Bsp. 12.21:

Beh: $k \geq 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist absolut konvergent

Bew:

$k=2$: $a_n := \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (n+1)} =: b_n \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$ ist konv. Maj. für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
neg. krit. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist abs. konvergent

$k \geq 2$: $0 < \frac{1}{n^k} < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist konv. Maj. für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ □

Satz 12.22 (Wurzelkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.

① $\exists q < 1 : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

② $\forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beweis:

① $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n \xrightarrow{0 < q < 1} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konv. Ry. wo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

② $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1^n = 1 \quad \forall n \geq n_0$
 $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Satz 12.23 (Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$.

① $\exists q < 1 : \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent

② $\forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Beweis:

① $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow |a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \leq q^2 \cdot |a_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}| = |a_{n_0}| \cdot q^{-n_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$

ist konvergente Rygeante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

② $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \Rightarrow |a_{n+1}| \geq |a_n| \neq 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}| \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$
 $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. $\square$

Kor. 12.24 (Praktische Wurzel-/Quotientenkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$.

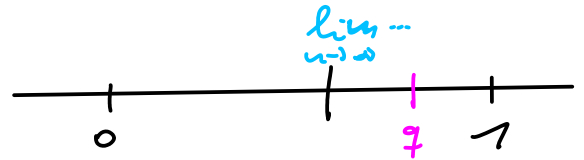
(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist **absolut konvergent**

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist **divergent**

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow$ keine Aussage zur Konvergenz

Beweis:

(a) $q := \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \dots}{2}$



$\Rightarrow$ Wende 12.22 (a) & 12.23 (a) an!

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \stackrel{12.23(d)}{\Rightarrow} \text{Bew.}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \stackrel{12.22(d)}{\Rightarrow} \text{Bew.}$

□

Bem. 12.25:

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist **divergent**

Aufl.: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \ \forall n \geq 1$

$\nexists q < 1 : \forall n : 1 - \frac{1}{n+1} \leq q \rightarrow$ OK geht nicht

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$

Bsp. 12.25:

Bew:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n!}}_{=: a_n} \text{ ist absolut konvergent}$$

Dann:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$$

$\Rightarrow$
PQR
12.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abs. konvergent.}$$

□

E) Das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen

Satz 12.27 (Cauchy-Produkt)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{K}$.

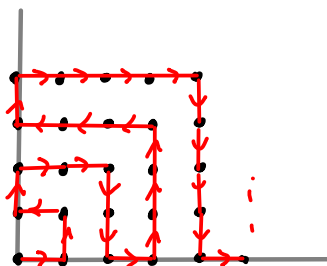
Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent

$$\text{und es gilt } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

$$\text{wobei } c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k+l=n} a_k \cdot b_l.$$

Beweis

① Konstruieren eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie folgt:



$$\begin{array}{ccccccc} (0,0) & \rightarrow & (1,0) & \rightarrow & (2,0) & \rightarrow & (3,0) & \rightarrow & (4,0) \\ (0,1) & \leftarrow & (1,1) & \leftarrow & (2,1) & \leftarrow & (3,1) & \leftarrow & (4,1) \\ (0,2) & \rightarrow & (1,2) & \rightarrow & (2,2) & \rightarrow & (3,2) & \rightarrow & (4,2) \\ (0,3) & \leftarrow & (1,3) & \leftarrow & (2,3) & \leftarrow & (3,3) & \leftarrow & (4,3) \\ (0,4) & \rightarrow & (1,4) & \rightarrow & (2,4) & \rightarrow & (3,4) & \rightarrow & (4,4) \end{array}$$

$$\text{Damit: } \{ (k, l) \mid 0 \leq k, l \leq n \} = \{ \sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma((n+1)^2 - 1) \}$$

② Definieren: $d_n := a_k \cdot b_l$, wenn $\sigma(n) = (k, l)$

Zu zeigen: $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ ist absolut konvergent

$$\sum_{n=0}^m |d_n| \leq \sum_{n=0}^{(m+1)^2-1} |d_n| \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m |a_k \cdot b_l| = \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot \sum_{l=0}^m |b_l|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|$$

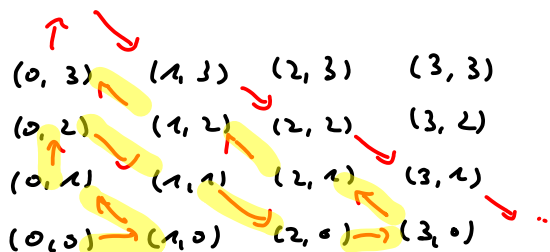
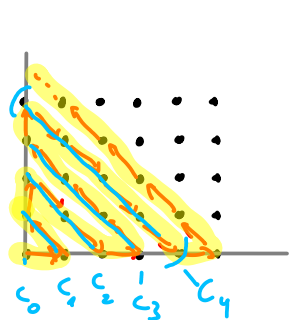
für alle $m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$ ist beschränkt, also konvergent

③ Behauptung: $\sum_{i=0}^{\infty} d_i \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{(n+1)^2-1} d_i \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \sum_{l=0}^n b_l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} d_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$$

④ Konstruieren mit Cantorschem Diagonalverfahren 2. Bijektion $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:



Setze: $e_n := a_k \cdot b_l = d_{\sigma^{-1}(\pi(n))}$ wenn $\pi(n) = (k, l)$

$\sigma^{-1} \circ \pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist bijektiv $\Rightarrow (e_n)_{n \in \mathbb{N}} = (d_{\sigma^{-1}(\pi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$
ist Umordnung von $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e_n$ ist absolut konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

⑤ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ existiert zu $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ durch Umklammern
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{6} \quad \sum_{h=0}^{\infty} |c_n| &= \sum_{h=0}^{\infty} \left| \sum_{h+l=n} a_h \cdot b_l \right| \leq \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{h+l=n} |a_h \cdot b_l| \\
 &\leq \sum_{h=0}^{\infty} |a_h| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| \leq \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} |a_h| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|}_{\text{hängt nicht von } n \text{ ab!}} \\
 \Rightarrow \left(\sum_{h=0}^{\infty} |c_n| \right)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ ist beschränkt, also konvergent} \\
 \Rightarrow \sum_{h=0}^{\infty} c_n &\text{ abs. konvergent.} \quad \textcircled{\beta}
 \end{aligned}$$

F) Potenzreihen

Def. 12.28:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ und t eine Veränderliche.
 Ein Ausdruck der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$ wird **Potenzreihe**
 in der Veränderlichen t mit **Entwicklungspunkt** a genannt.

Speziell: $a=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$

Ziel: setzen für t Werte $x \in \mathbb{K}$ ein und erhalten
 eine konvergente oder divergente Reihe in $\mathbb{K}$!

Lemma 12.19

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $y \in \mathbb{K}$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ konvergiert.}$$

Dann: $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist absolut konvergent.

Bew:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergiert} \Rightarrow (a_n y^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge}$$

$$\Rightarrow (a_n y^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \Rightarrow \exists s: \forall n \in \mathbb{N}: |a_n y^n| \leq s$$

- Sei $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$. Setze: $q := \frac{|x|}{|y|} < 1$
- $\Rightarrow |a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot y^n| \cdot \frac{|x^n|}{|y^n|} = \underbrace{|a_n \cdot y^n|}_{\leq s} \cdot q^n \leq s \cdot q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s \cdot q^n = s \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist konv. Rejovante für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$
- $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist abs. konv. nach Rejovantenkriterium. Q

Notation 12.30

- Definition:
- $\sup(\emptyset) := -\infty$
 - $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow \sup(A) := \infty$
 - Also: $\forall A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
 - Sei $x \in \mathbb{R}$.
 - $\frac{x}{\infty} := 0$
 - $\frac{x}{-\infty} := 0$
 - $\frac{x}{0} := \infty$ falls $x > 0$
 - $\frac{x}{0} := -\infty$ falls $x < 0$

Def. 12.31

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ ein Potenzreih in $\mathbb{K}$.

Dann heißt $r := \sup \{ |y| \mid y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ konvergiert} \} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

der **Konvergenzradius** von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n$ ist konvergent

Satz 12.32:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ ein Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r .

(a) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist abs. konvergent.

(b) $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > r$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist divergent.

Für $\mathcal{U}_r(0) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < r\}$ = r -Umgebung der 0, dann
definiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Abbildung

$$\mathcal{U}_r(0) \longrightarrow \mathbb{K}; x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$\mathcal{U}_r(0)$ heißt Konvergenzintervall der Potenzreihe.

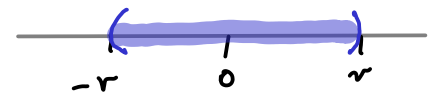
Bem. 12.33:

(a) 12.32 macht kein Aussage zu $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| = r$!

Die Menge $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| = r\}$ heißt Rand des Konvergenzintervalls.

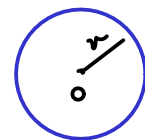
(b) Falls $r = \infty$, dann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist konvergent $\forall x \in \mathbb{K}$.

(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\mathcal{U}_r(0) = (-r, r)$



$\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$\mathcal{U}_r(0)$ = Kreisscheibe
um 0 mit
Radius r



Beweis von 12.32:

(a) Setze: $A := \{|y| \mid y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergent}\}$

$$\Rightarrow r = \sup(A)$$

Zeige: $\forall x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r \Rightarrow \exists |y| \in A : |x| < |y|$
mit $y \in \mathbb{K}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert

1. Fall: $r = \infty$.

Sei $x \in \mathbb{K} \Rightarrow |x| < \infty = \sup(A) \Rightarrow \exists |y| \in A : |x| < |y|$
mit $y \in \mathbb{K}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konvergiert

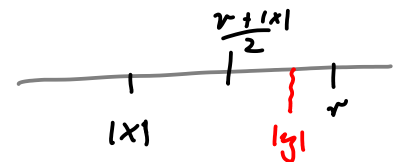
2. Fall: $r < \infty$

Sei $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$. $\Rightarrow \epsilon := \frac{r - |x|}{2} > 0$

$\Rightarrow r - \epsilon$ ist keine obere Schranke von A

$\Rightarrow \exists |y| \in A$ mit $y \in \mathbb{K}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ konv.
und $r - \epsilon < |y|$

$$|x| < \frac{r + |x|}{2}$$



Damit: Lemma 12.29 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ist abs. konv.

⑥ $|x| > r = \sup(A) \Rightarrow |x| \notin A \xRightarrow[\text{Def. 1}]{\text{Divergenz}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergiert $\square$

Satz von Cauchy-Hadamard 12.34

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$.

① Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$ als reell oder

unreell existiert, dann ist $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$ der

Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

⑥ Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ als regulärer oder unregulärer GW existiert, dann ist $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

Beweis:

① Sei $r := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

Sei $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist abs. konvergent.
PQK

Analog: $|x| > r \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ divergiert
PQK

Also: $r = \text{Konvergenzradius von } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

⑥ Analog mit PWK

⑧

Bsp. 12.35:

① Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ ist $1 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}}$

und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist divergent $\forall |x| = 1$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ ist in jedem

Randpunkt des Konvergenzradius divergent

② Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ ist $\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$,

aber $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ ist im Randpunkt -1 des KB konvergent!

G) Exponentialfunktion, Sinus & Cosinus als Potenzreihen

Satz 12.35:

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞ .

Die dadurch definierte Abbildung

$$\exp: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heissen wir die **Exponentialfunktion**.

Für $x, y \in \mathbb{K}$ gilt die Funktioneigenschaft

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis:

• Cauchy-Kriterium $\Rightarrow r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right|}$ ist L. v. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, wobei $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\parallel \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right|} = \frac{1}{0} = \infty$$

• Seien $x, y \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \stackrel{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{= \binom{n}{k}} x^k y^{n-k} \stackrel{\text{7.15}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x+y)^n = \exp(x+y) \end{aligned}$$

Bem. 12.37:

Definiere: $e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 1^n = e$

Sei $n \geq 2$

$$\Rightarrow \exp(n) = \underbrace{\exp(1) \cdot \exp(1) \cdots \exp(1)}_{n \text{ mal}} = e^n$$

$$e = \exp(1) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ mal}}\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{n}}$$

Definition für $x \in \mathbb{K}$: $e^x := \exp(x)$, damit: $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

Satz 12.38

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ hat $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und $\cos: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ heißt Cosinus.
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ hat $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und $\sin: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ heißt Sinus.
- (c) $\sin$ ist eine ungerade Fkt., d.h. $\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}$
 $\cos$ " " gerade Fkt., d.h. $\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{K}$
- (d) $\forall x \in \mathbb{K}: e^{ix} = \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$
- (e) $\forall x \in \mathbb{K}: \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- (f) $\forall x \in \mathbb{K}: \cos(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \wedge \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix})$
- (g) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \begin{cases} \cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \\ \sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y) \end{cases} \quad \text{Additionstheoreme}$
- (h) $\forall x \in \mathbb{R}: |e^{ix}| = 1$

Beweis

- (a) Sei $x \in \mathbb{K}$. Satz 12.3: $a_n := \begin{cases} (-1)^{n/2} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} & \text{falls } n=2m \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent,
 weil sie die bekannte Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \exp(x)$ hat,

$$\text{d.h. } |a_n| = \begin{cases} \frac{|x^{2n}|}{(2n)!} & \text{falls } n=2m \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \leq \frac{|x^n|}{n!}$$

Also, $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ist ∞ .

(b) analog

(c) $\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$

Analog: $\cos(-x) = \cos(x)$

(d) Beachte: $(i)^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$, $(i)^{2n+1} = i \cdot (i)^{2n} = i \cdot (-1)^n$

$$\Rightarrow \cos(x) + i \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot x)^n}{n!} = \exp(i \cdot x)$$

⑥ Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(x) - i \sin(x))$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(-x) + i \sin(-x))$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \exp(ix) \cdot \exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1$$

⑦ $e^{ix} + e^{-ix} \stackrel{\textcircled{1}}{=} (\cos(x) + i \sin(x)) + (\cos(-x) + i \sin(-x))$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \cos(x) + i \cancel{\sin(x)} + \cos(x) - i \cancel{\sin(x)} = 2 \cdot \cos(x)$$

Analog: $\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{ix} - e^{-ix})$

⑧ Sei $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \cos(x+y) + i \sin(x+y) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \exp(i \cdot (x+y))$$

$$= \exp(ix) \cdot \exp(iy) \stackrel{\textcircled{2}}{=} (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

$$= (\underbrace{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)}_{\in \mathbb{R}}) + i \cdot (\underbrace{\cos(x) \sin(y) + \sin(x) \cos(y)}_{\in \mathbb{R}})$$

Vergleiche Real- und Imaginärteil $\Rightarrow$ Beh.

⑨ Sei $x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{ix} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \underbrace{\cos(x)}_{\in \mathbb{R}} + i \cdot \underbrace{\sin(x)}_{\in \mathbb{R}}$

$$\Rightarrow |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \sqrt{1} = 1$$

□

Bem. 12.41:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$ eine PR mit {atw: -kl. yspkt. a.

Dann: $r = \sup\{|y| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ konvergiert}\} = \text{Konvergenzradius von } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$

• $\forall x : |x-a| < r \Rightarrow \sum a_n \cdot (x-a)^n$ also konvergent

• $\forall x : |x-a| > r \Rightarrow \dots \dots \dots$ divergent

• Formeln wie Cauchy-Majorantenfunktion

zur Berechnung des KR

□

§ 13 Grenzwerte von Funktionen

A) Häufungspunkte von Teilmengen von $\mathbb{R}$

Def. 13.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

a heißt **Häufungspunkt** von U

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in U \setminus \{a\} : 0 < |x - a| < \varepsilon$$

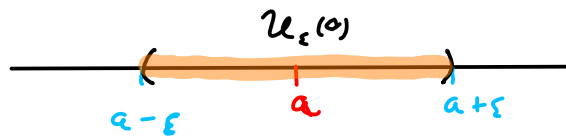
Achtung: a muss kein Element von U sein.

Bem. 13.2:

Sei $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$

die **ε -Umgebung** von a :



Damit: a ist HP von $U \Leftrightarrow$ jede ε -Umgebung von a enthält ein x aus U mit $x \neq a$.

Bsp. 13.3:

Jede reelle Zahl ist HP von $U = \mathbb{Q}$.

Damit:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q} \cap (a, a + \varepsilon) \Rightarrow x \in U \setminus \{a\} \text{ mit } |x - a| < \varepsilon$$

g.l.

$$\Rightarrow a \text{ ist HP von } \mathbb{Q}.$$

□

Prop. 13.4 (Folgenkriterium für HP)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

Dann: a ist **HP** von U

$$\Leftrightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in U \setminus \{a\} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei a HP von $\mathcal{U}$. Sei $n \in \mathbb{N}$

Setze: $\varepsilon := \frac{1}{n+1} > 0$

$\Rightarrow \exists x \in \mathcal{U} \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon = \frac{1}{n+1}$

Setze: $a_n := x \Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$

Zudem: $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n+1}$

$$\begin{array}{ccc} n \rightarrow \infty \downarrow & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ 0 & \Rightarrow & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

" $\Leftarrow$ " Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $a_n \rightarrow a$.

Sei $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$

Setze: $x := a_{n_\varepsilon} \Rightarrow x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $|x - a| < \varepsilon$

Also: a ist HP von $\mathcal{U}$. □

Bsp. 13.5:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Dann: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist HP von } (a, b)\} = [a, b]$

Beweis:

" $\subseteq$ " Sei c HP von (a, b) $[a, b]$

$\Rightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in (a, b)$ und $a_n \neq c$

10.4

und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \in [a, b]$

11.28

" $\geq$ " Sei $c \in [a, b]$

1. Fall: $c < b$

Sei $n \geq 1$. Setze: $a_n := c + \frac{b-c}{2 \cdot n} \neq c$

$$\begin{array}{c} (a, b) \\ \cup \\ c + \frac{b-c}{2 \cdot n} \\ \downarrow n \rightarrow \infty \\ c \end{array}$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in (a, b)$ und $a_n \neq c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

$\Rightarrow$ c ist HP von (a, b)
13.4

2. Fall: $c = b$, analog.

$$\begin{array}{c} (a, b) \\ \cup \\ c - \frac{c-a}{2 \cdot n} \rightarrow c \\ \neq c \end{array}$$

13

B) Grenzwerte von Funktionen

Def. 13.6:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ HP von U .

$y \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von f in a

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U$ mit $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreib. dann: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} y$

Sagt: $f(x)$ konvergiert gegen y für x gegen a .

Prop. 13.7: (Folgenkriterium für Gw von Funktionen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und a in HP von U .

Dann sind äq:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$

(b) $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U \setminus \{a\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b):

Sei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

z.z.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(a_n) - y| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U} \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists n_{\delta_\varepsilon} : \forall n \geq n_{\delta_\varepsilon} : |a_n - a| < \delta_\varepsilon$

Setze: $n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}$. Sei $n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow 0 < |a_n - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(a_n) - y| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$

(b) $\Rightarrow$ (a):

Sei y nicht GW von f in a

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta \in \mathcal{U} \setminus \{a\} : 0 < |x_\delta - a| < \delta$, aber $|f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$

Sei $n \geq 1$. Setze: $\delta_n := \frac{1}{n}$ und $a_n := x_{\delta_n} = x_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\begin{matrix} \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 0 \quad \quad \quad 0 \end{matrix}$

Aber: $|f(a_n) - y| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow f(a_n) \not\rightarrow y$

□

Bsp. 13.81

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$, $a = 3$ ist HP von $\mathbb{R}$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ und $a_n \rightarrow 3$

$$\Rightarrow_{11.25} f(a_n) = a_n^2 = a_n \cdot a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 3 = 9$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 3 & & 3 \end{array}$$

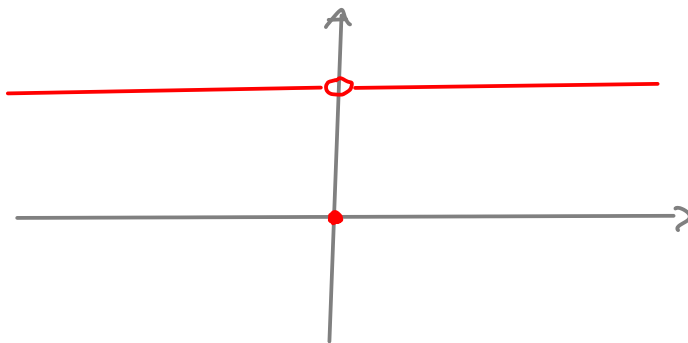
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = f(3)$$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $a = 0$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow f(a_n) = \underbrace{1}_{a_n \neq 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

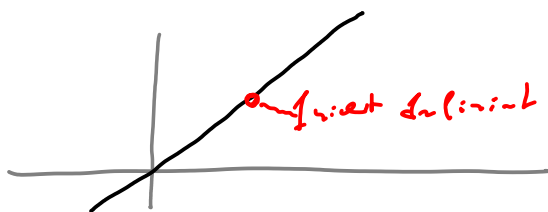


(c) $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $a = 1$ ist HP von $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 1$ und $a_n \rightarrow 1$.

$$\Rightarrow f(a_n) = \frac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} = \frac{(a_n + 1) \cdot \cancel{a_n - 1}}{\cancel{a_n - 1}} = a_n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \text{ obwohl } a = 1 \text{ nicht in Def.bereich von } f \text{ liegt!}$$

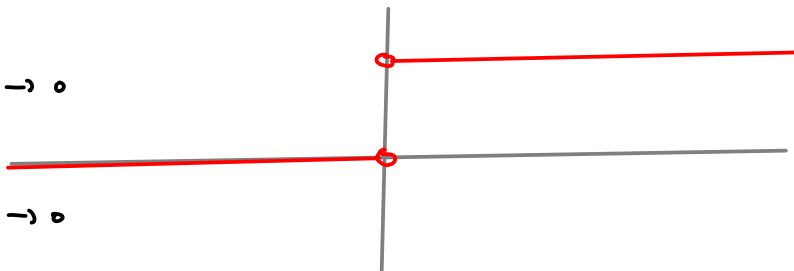


d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad \begin{array}{l} a = 0 \\ \text{ist HP} \\ \text{von } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$

Behaupte die Folgen:

• $a_n = -\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $a_n \rightarrow 0$

• $b_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $b_n \rightarrow 0$



Aber: $f(a_n) = 0 \longrightarrow 0$
 $f(b_n) = 1 \longrightarrow 1$ $\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c) Die Grenzwertsätze für Funktionen

Def. 13.9:

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, $c \in \mathbb{R}$.

Definiere: • $c \cdot f: U \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto c \cdot f(x)$

• $f+g: U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) + g(x)$

• $f-g: U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) - g(x)$

• $f \cdot g: U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$

• $\frac{f}{g}: \{x \in U \cap V \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

Prop. 13.10 (Grenzwertsätze für Funktionen)

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, a HP von U , $c \in \mathbb{R}$.

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = z \Rightarrow y = z$

② Wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren, dann gelten

③ $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f)(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ④ $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

⑤ $\lim_{x \rightarrow a} (f-g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ⑥ $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

⑦ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \Rightarrow a$ HP von $\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ und $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$.

Beweis:

① a ist HP von $\mathcal{U} \stackrel{13.4}{\Rightarrow} \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\stackrel{13.7}{\Rightarrow} y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = z \stackrel{11.26}{\Rightarrow} y = z$$

② analog mit 11.15.

③ 13.4 $\Rightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\stackrel{13.7}{\Rightarrow} y := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$$

$$\stackrel{11.25}{\Rightarrow} \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : f(a_n) \neq 0$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \geq n_0}$ ist Folge in $\{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\} \setminus \{a\}$

$$\text{und } a_n \rightarrow a$$

$$\stackrel{13.4}{\Rightarrow} a \text{ ist HP von } \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\}$$

Rest analog mit 11.15.

□

Def. 13.11:

① Sei t eine Variable und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt eine Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + a_1 \cdot t + a_0$$

ein **Polynom** in der Variable t mit

Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$ in $\mathbb{R}$

Wenn $a_n \neq 0$, heißt $n =: \deg\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k\right)$ der **Grad**
des Polynoms $\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$.

Satz: $\deg(0) := -\infty$

② Setze: $\mathbb{R}[t] := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mid n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$
 = Menge aller Polynome in der Variable t
 mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \deg: \underbrace{\mathbb{R}[t]}_f \longrightarrow \underbrace{\mathbb{N} \cup \{-\infty\}}_{\deg(f)}$$

③ Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom.

Dann: $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$

Funktionen dieser Form heißen **Polynomfunktionen**!

Zudem: sei $f, g \in \mathbb{R}[t]$ mit $g \neq 0$

dann gibt eine Funktion der Form

$$\frac{f}{g}: \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine **rationale Funktion**.

④ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$, dann heißt x eine **Nullstelle** von f .

Bem. 13.12:

$$0 \neq g \in \mathbb{R}[t] \implies |\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}| \leq \deg(g) < \infty$$

Bsp. 13.13:

① $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$ und $a \in \mathbb{R} \xRightarrow{13.10} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^k = f(a)$

② $f, g \in \mathbb{R}[t], a \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \xRightarrow{13.10} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f(a)}{g(a)}$
 $\neq 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

1) Unendliche Grenzwerte

Def. 13.14

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

(a) U heißt **nach oben unbeschränkt** $\Leftrightarrow U \cap [0, \infty)$ ist nicht beschränkt
 U " **nach unten unbeschränkt** $\Leftrightarrow U \cap (-\infty, 0]$ " " "

(b) Sei U nach oben unbeschränkt. y heißt der **Grenzwert von f in ∞**
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists s_\varepsilon > 0 : \forall x \in U \text{ mit } x > s_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$

(c) Sei U nach unten unbeschränkt. y heißt der **Grenzwert von f in $-\infty$**
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists s_\varepsilon < 0 : \forall x \in U \text{ mit } x < s_\varepsilon : |f(x) - y| < \varepsilon$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$

Bem. 13.15 (Grenzwertsätze & Folgerung für GU in $\pm \infty$)

Folgekriterium 13.10 und GU -Sätze 13.15 verallgemeinern sich:

z.B.: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U$ und $a_n \rightarrow \infty : f(a_n) \rightarrow y$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x).$$

Def. 13.16:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und a HP von U .

(a) ∞ heißt **uneigentlicher GW** von f in a

$\Leftrightarrow \forall s > 0 \exists \delta_s > 0 : \forall x \in U \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta_s \text{ gilt: } f(x) > s$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

(b) $-\infty$ heißt **uneigentlicher GW** von f in a

$\Leftrightarrow \forall s < 0 \exists \delta_s > 0 : \forall x \in U \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta_s \text{ gilt: } f(x) < s$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

③ ∞ heißt **uneigentlichen GL** von f in ∞

$(\Leftrightarrow) \forall s > 0 \exists t > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > t$ gilt: $f(x) > s$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

④ $-\infty$ heißt **uneigentlichen GL** von f in ∞

$(\Leftrightarrow) \forall s < 0 \exists t > 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > t$ gilt: $f(x) < s$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

⑤ ∞ heißt **uneigentlichen GL** von f in $-\infty$

$(\Leftrightarrow) \forall s > 0 \exists t < 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x < t$ gilt: $f(x) > s$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

⑥ $-\infty$ heißt **uneigentlichen GL** von f in $-\infty$

$(\Leftrightarrow) \forall s < 0 \exists t < 0 : \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x < t$ gilt: $f(x) < s$

Schreibe: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Bem. 13.17:

Die GL-Sätze 13.10 und die Folgerit. verallgemeinern sich auf uneigentliche GLn wie in 13.16, wenn wir die Randmenge aus 11.35 einsetzen:

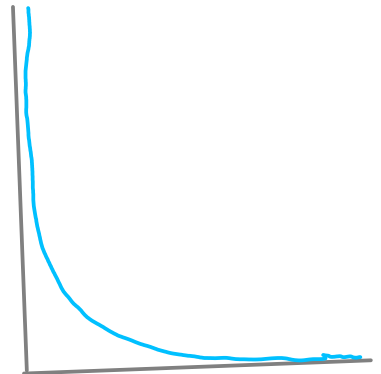
z.B.: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \rightarrow \infty$ gilt: $f(a_n) \rightarrow -\infty$

Bsp. 13.18:

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



Def:

• Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in (0, \infty)$ mit $a_n \rightarrow 0$

z.B.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty$

d.h. $\forall s > 0 \exists n_s : \forall n \geq n_s : f(a_n) > s$

Sei $s > 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{s} > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - 0| < \varepsilon$
 $\parallel$
 $a_n \quad \frac{1}{s}$

$\Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\frac{1}{s}} = s \quad \forall n \geq n_\varepsilon =: n_s$

Folgekrit. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.

• Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in (0, \infty)$ und $a_n \rightarrow \infty$.

z.B.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |f(a_n) - 0| < \varepsilon$
 $\parallel$
 $f(a_n)$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow s := \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\Rightarrow \exists n_s : \forall n \geq n_s : a_n > s$

$\Rightarrow f(a_n) = \frac{1}{a_n} < \frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \forall n \geq n_s =: n_\varepsilon$

Folgekrit. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

[5]

Bsp. 13.19:

Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit $n = \deg(f) \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & , \text{ falls } a_n > 0 \\ -\infty & , \text{ falls } a_n < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade}) \text{ oder} \\ & (a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade}) \\ -\infty, & \text{falls } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade}) \text{ oder} \\ & (a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade}) \end{cases}$$

Beweis für $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $a_n > 0$:

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \underbrace{\left(\frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \right)}_{> 0 \text{ (*)}} \geq \frac{\tilde{a}_n \cdot x^n}{2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

für x groß

Zu (*):

$$x \geq \max \left\{ 1, \frac{-2 \cdot n \cdot a_0}{a_n}, \frac{-2 \cdot n \cdot a_1}{a_n}, \dots, \frac{-2 \cdot n \cdot a_{n-1}}{a_n} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n \cdot x^n}{2 \cdot n} \geq \underbrace{-a_k \cdot x^k}_{\forall k=0, \dots, n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n \cdot x^n}{2} = n \cdot \underbrace{\frac{a_n \cdot x^n}{2 \cdot n}}_{\geq} \geq \sum_{k=0}^{n-1} -a_k \cdot x^k$$

$$\Rightarrow \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \geq 0$$

□

E) Links- und rechtsseitiger Grenzwert

Bemerkung 13.10 (links- & rechtsseitiger Grenzwert)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Ist a ein Häufungspunkt von $U_{<a} := \{x \in U \mid x < a\}$, dann nennen wir $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f|_{U_{<a}}(x)$ den linksseitigen Grenzwert von f in a .

(b) Ist a ein Häufungspunkt von $U_{>a} := \{x \in U \mid x > a\}$, dann nennen wir $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) := \lim_{x \rightarrow a} f|_{U_{>a}}(x)$ den rechtsseitigen Grenzwert von f in a .

(c) Sei a ein Häufungspunkt von $U_{<a}$ und $U_{>a}$. Gehen dann existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert von f in a und stimmen überein, wenn der Grenzwert von f in a existiert und es gilt: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$.

Wenn f abschnittsweise definiert ist, ist es manchmal leichter, den links- und rechtsseitigen GV getrennt zu berechnen.

Bsp. 13.21

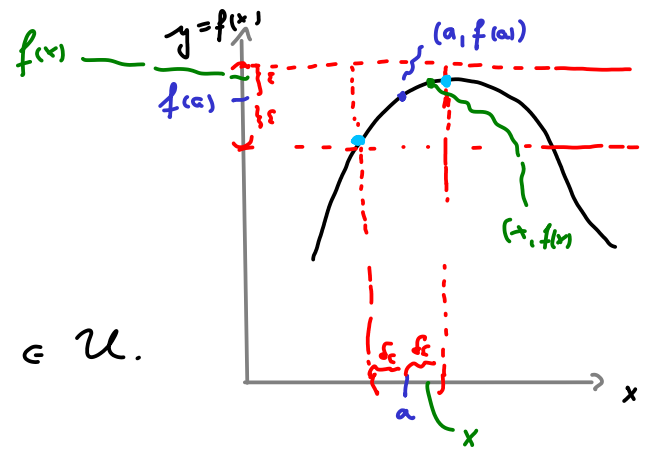
$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^3+2x^2+1, & x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 0 ist Häufungspunkt von $U_{<0} = (-\infty, 0)$ und $U_{>0} = (0, \infty)$

$$\text{und } \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x+1 = 1 = \lim_{x \rightarrow 0+} x^3+2x^2+1 = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

§ 14 Stetigkeit



A) Stetige Funktionen

Def. 14.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

f heißt **stetig** in a

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U \text{ mit } |x-a| < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f heißt **stetig** (auf U), wenn f stetig in jedem Punkt von U ist.

Notation: $\mathcal{C}(U, \mathbb{R}) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } U\}$

Bem. 14.2

Für die Stetigkeit von f in a ist nur das Verhalten von f in einer kleinen Umgebung $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a maßgeblich. Wir nennen die Stetigkeit deshalb eine **lokale Eigenschaft**.

Lemma 14.3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und a HP von U .

Dann: f ist **stetig** in a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Beweis: Def. 13.6 + Def. 14.1.

Bsp. 14.4:

(a) Jede Polynomfkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Dann: $a \in \mathbb{R} \xRightarrow{13.13} a \text{ HP von } \mathbb{R} \text{ \& } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(b) Jede rationale Fkt. $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x)=0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

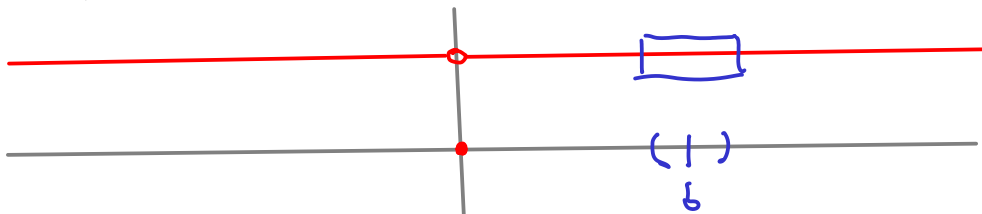
Dann: $a \in \mathbb{R} \text{ mit } g(a) \neq 0 \xRightarrow{13.13} a \text{ HP von } \frac{f}{g} \text{ \& } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f}{g}(a)$.

③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ist nicht stetig in $a = 0$

Denn: a ist HP von $\mathbb{R}$ & $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$

Behaupte: f stetig in $b \quad \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



④ $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & $V \subseteq U \Rightarrow f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

⑤ Sei $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, dann ist f stetig!

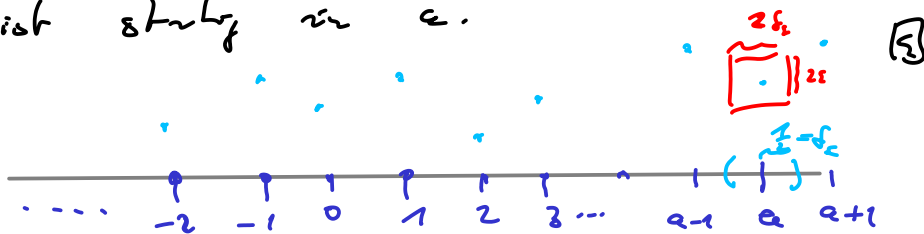
! d.h. Stetigkeit ist für Fkt. von $\mathbb{Z}$ kein gutes Konzept!

Denn: Sei $a \in \mathbb{Z}$ und sei $\varepsilon > 0$.

Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{1}{2}$. Sei $x \in \mathbb{Z}$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x = a \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$$

Also, f ist stetig in a .



Satz 14.5 (Folgenkriterium für Stetigkeit)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

Dann: f ist stetig in a

$(\Rightarrow) \quad \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$

Beweis: Wende: 13.7.

□

Bsp. 14.6:

Beh: Die Betragsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$ ist stetig.

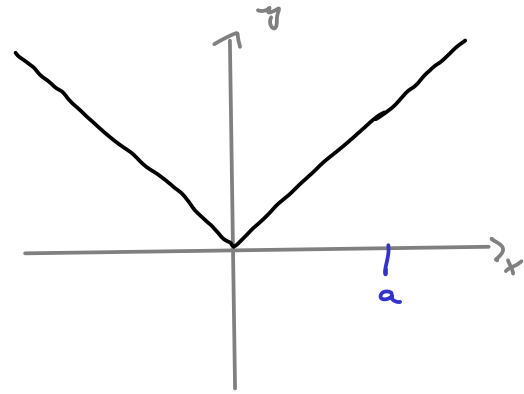
Dam:

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow a$.

$$\Rightarrow f(a_n) = |a_n| \rightarrow |a| = f(a)$$

11.15 □



B) Rechnen mit stetigen Funktionen

Proposition 14.7

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in U$ und sei $c \in \mathbb{R}$.

(a) $c \cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sind stetig in a .

(b) Falls $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}: U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a .

Beweis:

Folgerungen 14.5 + GW-Sätze für Folgen

z.B.: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$$\stackrel{14.5}{\Rightarrow} f(a_n) \rightarrow f(a) \quad + \quad g(a_n) \rightarrow g(a)$$

$$\stackrel{11.15}{\Rightarrow} (f+g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \rightarrow f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

$$\stackrel{14.5}{\Rightarrow} f+g \text{ stetig in } a.$$

□

Prop. 14.8

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{Im}(f) \subseteq V$ und $a \in U$.

Wenn f stetig in a und g stetig in $f(a)$, dann: $g \circ f$ stetig in a

Bew. 11:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

z.z.: $(g \circ f)(a_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$

$$a_n \xrightarrow[\substack{\text{14.5} \\ \text{f stetig in } a}]{\text{14.5}} f(a_n) \rightarrow f(a)$$

$\cap$ $\quad \quad \quad \cap$
 $\vee$ $\quad \quad \quad \vee$

14.5 $\Downarrow$ g stetig in $f(a)$

$$(g \circ f)(a_n) = g(f(a_n)) \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

Also: $g \circ f$ stetig in a wegen 14.5. □

Def. 14.10:

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R} \setminus U$ ein HP von U .

Dann: f heißt **stetig fortsetzbar in a** $\iff$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert

zudem: $g: U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in U \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases}$

heißt die **stetige Fortsetzung** von f in a

Bemerk: g ist stetig (auch in a), wegen 14.3

Bsp. 14.11:

② $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ist stetig als rat. Fkt.

und 1 ist HP von $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
13.80

Also: f ist **stetig fortsetzbar in 1**

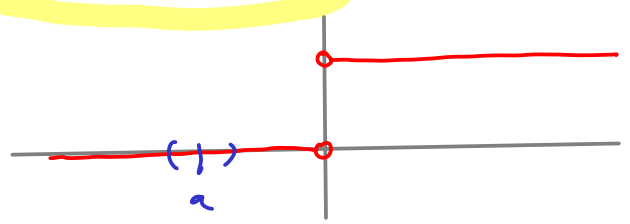
Durch: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

Damit: $g(x) = x + 1$

① $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ist stetig!

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$\Rightarrow f$ nicht stetig fortsetzbar in 0



② $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ist stetig in a $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Trotzdem ist f in 0 nicht stetig fortsetzbar, weil f in 0 schon definiert ist!

C) Der Zwischenwertsatz

Satz 14.12 (Zwischenwertsatz)

Eine stetige Fkt. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beweis:

o.B.: $f(a) \leq f(b)$. Sei $c \in [f(a), f(b)]$.

Def.: $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - c \Rightarrow$ 14.7 g ist stetig

Z.z.: $\exists x \in [a, b] : g(x) = 0$ (d.h. $f(x) = c$)

Idee: Konstruieren x mittels Intervallschachtelung

Setze: $[a_0, b_0] := [a, b]$ und $x_0 := \frac{b_0 + a_0}{2} \in [a, b]$

1. Fall: $g(x_0) = 0 \Rightarrow x := x_0$ tut's

2. Fall: $g(x_0) > 0 \Rightarrow g(a_0) < g(x_0)$. Setze: $[a_1, b_1] := [a_0, x_0]$

3. Fall: $g(x_0) < 0 \Rightarrow g(x_0) < g(b_0)$. Setze: $[a_1, b_1] := [x_0, b_0]$

Faktor mit $[a, b]$ fort wie mit $[a, b]$, usw.

Dann folgende Fälle auftreten:

Fall a): wir finden nach endl. vielen Schritten ein $x_n \in [a, b]$
mit $g(x_n) = 0 \implies x := x_n$ tut's

Fall b): das Verfahren bricht nicht ab!

$\implies$ wir finden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt,

$(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fallend

$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = y$
Squeeze-
Kriterium

zudem:

$$\begin{array}{ccc} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ y - x & & \end{array}$$

$$\implies x = y = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{b_n}_{\substack{\in [a, b] \\ \text{Mittel}}} \in [a, b]$$

$$\begin{array}{ccc} \implies g(x) \leftarrow g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n) \longrightarrow g(x) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ g(x) \leq 0 & & 0 \leq g(x) \\ \hline \Downarrow & & \\ g(x) = 0 & & \end{array}$$

□

Bsp. 14.13

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynomfunktion ungerader Grades, dann hat f ein Nullstell.

Dann:

$$\text{Sei } f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k, \quad a_n \neq 0, \quad n \text{ ungerade.}$$

Dann hat f dieselben Nullstellen wie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{a_n} \cdot f(x)$

$$x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot x^k$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\implies \exists a < b : g(a) < 0 < g(b) \stackrel{ZWS}{\implies} \exists x \in [a, b] : g(x) = 0$$

□

D) Beschränktheit stetiger Funktionen

Def. 14.14:

Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn $\exists M(f)$ beschränkt ist.

Proposition 14.15

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig**, dann ist f **beschränkt**.

Beweis:

Ang: f ist nicht beschränkt

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in [a, b] : |f(a_n)| > n \quad (*)$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Folge im Intervall $[a, b]$, d.h. beschränkt

$$\stackrel{11.26}{\Rightarrow} \stackrel{BW}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = c \in [a, b] \right\} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ 11.28 \end{matrix}$$

$$\text{Vn. } \Rightarrow f \text{ stetig} \Rightarrow |f| \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|f(c)|}_{\in \mathbb{R}} < \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} |f(a_{n_k})|}_{(*)} > n_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$



□

Satz 14.16:

Eine **stetige** Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt ihr **Maximum** & **Minimum** an,

d.h. $\exists c, d \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : f(c) \leq f(x) \leq f(d)$

Beweis:

$$14.15 \Rightarrow \exists M(f) \text{ beschränkt} \Rightarrow \exists \eta := \sup(\exists M(f)) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1 : \exists a_n \in [a, b] : \eta - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq \eta$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $[a, b]$, damit beschränkt

$$\stackrel{11.26}{\Rightarrow} \stackrel{BW}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} =: d \in [a, b] \right\} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ 11.28 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \eta < \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\eta - \frac{1}{n_k} < f(a_{n_k}) \leq \eta \right)}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \eta}$$

$$\stackrel{11.17}{\Rightarrow} \eta = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} f(d)$$

Analogy: $\exists c \in [a, b] : \inf(\exists M(f)) = f(c)$.

□

Bsp. 14.17:

② $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^2$ ist stetig

$$\Rightarrow \max(\text{Im}(f)) = 1 = f(1) = f(-1)$$

$$\min(\text{Im}(f)) = 0 = f(0)$$

③ $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig

$\Rightarrow \text{Im}(f) = (0, \infty)$ ist nicht nach oben beschränkt

und f nimmt weder sein Maximum noch sein Minimum an.

E) Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen

Def. 14.18:

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $U \subseteq \mathbb{R}$.

① f heißt **monoton wachsend** $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \leq f(y)$

② f heißt **streng monoton wachsend** $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) < f(y)$

③ f heißt **monoton fallend** $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) \geq f(y)$

④ f heißt **streng monoton fallend** $\Leftrightarrow \forall x, y \in U$ mit $x < y$ gilt: $f(x) > f(y)$

Bsp. 14.19:

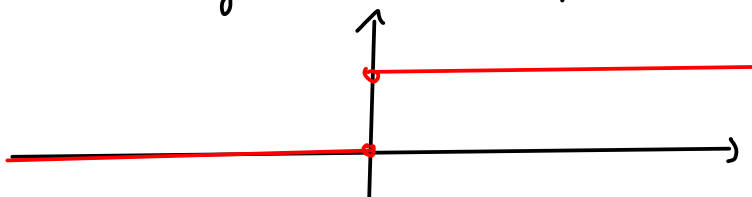
② $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^u$ (für ein $u \in \mathbb{N}_{\geq 1}$)

ist streng monoton wachsend,

denn, 8.17 $\Rightarrow (0 \leq x < y \Rightarrow f(x) = x^u < y^u = f(y))$

③ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ist monoton

wachsend, aber nicht streng monoton!



Bem. 14.20:

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ **streng monoton wachsend / fallend** $\Rightarrow f$ ist **injektiv**

Denn: o.F.: f streng monoton wachsend.

Sei $x, y \in U$ mit $x \neq y$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{1. Fall: } x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{2. Fall: } x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \begin{array}{l} \text{"} \\ f \text{ injektiv} \end{array} \quad \text{B}$$

Umkehrsatz für streng monoton stetige Funktionen 14.21

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion,
 $c := \inf f(\mathcal{I}_n(f)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $d := \sup f(\mathcal{I}_n(f)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Wenn f **streng monoton wachsend** und **stetig** ist, dann:

① $f: (a, b) \longrightarrow (c, d)$ ist **bijektiv**

② $f^{-1}: (c, d) \longrightarrow (a, b)$ ist **streng monoton wachsend** und **stetig**.

(b) Wenn f **streng monoton fallend** und **stetig** ist, dann:

① $f: (a, b) \longrightarrow (c, d)$ ist **bijektiv**

② $f^{-1}: (c, d) \longrightarrow (a, b)$ ist **streng monoton fallend** und **stetig**.

Beweis:

(a) zu zeigen: $c, d \notin \mathcal{I}_n(f)$

Ang. $d \in \mathcal{I}_n(f) \Rightarrow \exists x \in (a, b) : f(x) = d$

$$\Rightarrow \exists x' \in (a, b) : x < x' < b \Rightarrow \underbrace{d = f(x)}_{\sup(\mathcal{I}_n(f))} < \underbrace{f(x')}_{\mathcal{I}_n(f)} \quad \downarrow$$

Also: $d \notin \mathcal{I}_n(f)$. Analog: $c \notin \mathcal{I}_n(f)$

Zu 1: $\mathcal{D}_m(f) = (c, d)$

" $\subseteq$ " $y \in \mathcal{D}_m(f) \Rightarrow c = \inf(\mathcal{D}_m(f)) \leq y \leq \sup(\mathcal{D}_m(f)) = d$
 $\Rightarrow y \in (c, d)$

" $\supset$ " Sei $y \in (c, d) \Rightarrow c < y < d$
 $\inf(\mathcal{D}_m(f)) \qquad \sup(\mathcal{D}_m(f))$

$\Rightarrow y$ ist kein oberer / unterer Schranke von $\mathcal{D}_m(f)$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in (a, b) : f(x_1) < y < f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 < x_2$

f stetig
monot. wach.

$\Rightarrow f|_{[x_1, x_2]} : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig

$\Rightarrow \exists x \in [x_1, x_2] \subseteq (a, b) : f(x) = y$

zws

$\Rightarrow y \in \mathcal{D}_m(f)$

Damit: $f : (a, b) \rightarrow \mathcal{D}_m(f) = (c, d)$ stetig und streng monot. wach.

$\Rightarrow f$ injektiv + surjektiv, also bijektiv

$\Rightarrow \textcircled{1}$

Zu 2: $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ streng monoton wachsend

Sei $y_1, y_2 \in (c, d)$ mit $y_1 < y_2$

$f(a, b)$

$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in (a, b) : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

$\Rightarrow f$ stetig
monot. wach.

$x_1 < x_2$
 $\Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist stetig monot. wach.

Zu zeigen: f^{-1} ist stetig

Sei $y_0 \in (c, d)$ und $\varepsilon > 0$.

Z.z.: $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in (c, d)$ mit $|y - y_0| < \delta_\varepsilon : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$

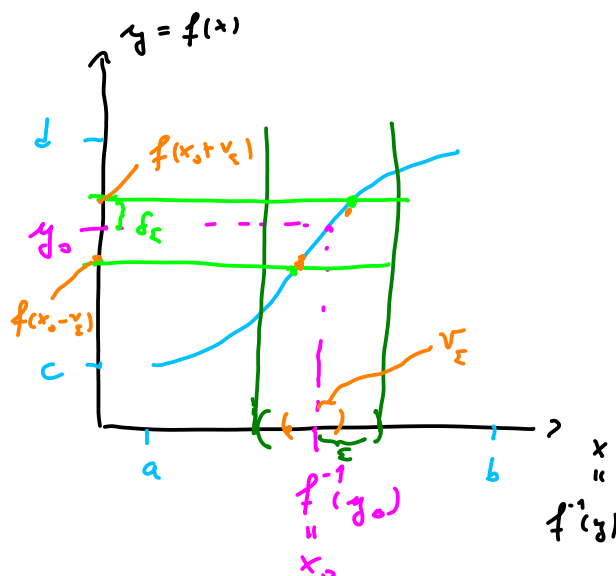
Setze $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und

$$r_\varepsilon := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{b-x_0}{2}, \frac{x_0-a}{2} \right\} > 0$$

$$\Rightarrow a < x_0 - r_\varepsilon < x_0 < x_0 + r_\varepsilon < b$$

$$\Rightarrow f(x_0 - r_\varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + r_\varepsilon)$$

$\parallel$
 y_0



Setze: $\delta_\varepsilon := \min \{ y_0 - f(x_0 - r_\varepsilon), f(x_0 + r_\varepsilon) - y_0 \} > 0$

$$\Rightarrow f(x_0 - r_\varepsilon) \leq y_0 - \delta_\varepsilon < y_0 < y_0 + \delta_\varepsilon \leq f(x_0 + r_\varepsilon)$$

Sei $y \in (y_0 - \delta_\varepsilon, y_0 + \delta_\varepsilon) \subseteq (c, d)$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x_0 - r_\varepsilon)) \leq f^{-1}(y_0 - \delta_\varepsilon) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta_\varepsilon) \leq f^{-1}(f(x_0 + r_\varepsilon))$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 $x_0 - r_\varepsilon$ x_0 $x_0 + r_\varepsilon$

$$\Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |f^{-1}(y) - x_0| < r_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Also: f^{-1} ist stetig in y_0 , damit auf (c, d)

⑥ analog

Bem. 14.22:

Wenn $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & streng monoton wachsend,

denn: $c := \inf(\mathcal{D}_n(f)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $d := \sup(\mathcal{D}_n(f)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$

Wenn $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig & streng monoton fallend,

denn: $c := \inf(\mathcal{D}_n(f)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$, $d := \sup(\mathcal{D}_n(f)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Wenn f stetig nach a oder b fortgesetzt werden kann,
 dann: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ ist dann in $\mathbb{R}$
 und f^{-1} kann in c bzw. d stetig fortgesetzt
 werden durch die entsprechenden G.W. a bzw. b .

D.h. 14.21 gilt auch für **halboffen & abgeschlossene Intervalle**.

Bsp. 14.23:

Sei $n \geq 2$.

$\Rightarrow f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend
 & stetig

$\Rightarrow$
 14.21 $f^{-1}: (\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) \rightarrow (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend
 & stetig
 " "
 " $\sqrt[n]{\cdot}$ "

d.h.: $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$

$\Rightarrow$
 14.22 $\sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist **str. mon. wach.** & **stetig**

Wirk $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = 0$.

Zus.: $\sqrt{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig** & **str. mon. wach.**

Korollar 14.24:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Beweis:

Satz 1: $a_n := \sqrt[n]{n} - 1, \quad n \geq 2$.

z.z.: $(a_n)_{n \geq 2}$ ist eine Nullfolge!

Bemerkung: $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \geq 2$

$$\Rightarrow n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{a_n^k}_{>0} \cdot 1^{n-k} \geq 1 + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2}_{>0} > 1$$

$$\Rightarrow n-1 \geq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \geq a_n^2 > 0 \quad \Rightarrow a_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \frac{2}{n} \\ \downarrow n \rightarrow \infty \\ 0 \end{array}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty \\ 0$$

$\int \sqrt{x}$ stetig

$$a_n = \sqrt[n]{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[0]{0} = 0$$

□

F) Gleichmäßige Stetigkeit

Bem. 14.25:

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig** auf U

$\Leftrightarrow \forall a \in U$ gilt f ist stetig in a

$\Leftrightarrow \forall a \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\varepsilon, a} > 0 : \forall x \in U \text{ mit } |x - a| < \delta_{\varepsilon, a} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Def. 14.26.

Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf U

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in U \text{ mit } |x - y| < \delta_\varepsilon : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Bem. 14.27

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig auf $U \Rightarrow f$ stetig auf U

Satz 14.28:

Wenn $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f glm. stetig auf $[a, b]$

Beweis:

Ang: f ist nicht glm. stetig auf $[a, b]$.

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta_\varepsilon > 0 \exists x_{\delta_\varepsilon}, y_{\delta_\varepsilon} \in [a, b]$ mit $|x_{\delta_\varepsilon} - y_{\delta_\varepsilon}| < \delta_\varepsilon$, aber $|f(x_{\delta_\varepsilon}) - f(y_{\delta_\varepsilon})| \geq \varepsilon$

Für $n \geq 1$ und $\delta_\varepsilon := \frac{1}{n}$ wählen die passenden Werte
 $x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}}$ und $y_{\delta_\varepsilon} = y_{\frac{1}{n}}$ wie oben und setzen:

$$a_n := x_{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad b_n := y_{\frac{1}{n}}.$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge in $[a, b]$, und damit beschränkt

$\stackrel{M.26}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \eta \in [a, b]$
 BW

$\Rightarrow (b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Folge in $[a, b]$ und damit beschränkt

$\stackrel{M.26}{\Rightarrow} \exists \text{ TF } (b_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ mit $b_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \zeta$
 BW

$$\Rightarrow a_{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \eta$$

$$\text{Zudem: } \begin{array}{c} |a_{n_{k_l}} - b_{n_{k_l}}| = |x_{\frac{1}{n_{k_l}}} - y_{\frac{1}{n_{k_l}}}| < \frac{1}{n_{k_l}} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \\ \swarrow \text{ } l \rightarrow \infty \end{array}$$

$$|\eta - \zeta| \Rightarrow \eta = \zeta \in [a, b]$$

$$\Rightarrow 0 = |f(\eta) - f(\eta)| \leftarrow \text{w} |f(a_{n_{k_l}}) - f(b_{n_{k_l}})| \geq \varepsilon > 0 \quad \text{!}$$

Also: f ist glm. stetig auf $[a, b]$

□

Bsp. 14.29:

(a) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist stetig

$\stackrel{M.28}{\Rightarrow} f$ ist glm. stetig auf $[0, 1]$.

Prüfe dies mit der Definition nach:

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \underset{[0, 1]}{x, y} : |x - y| < \delta_\varepsilon : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Seien $x, y \in (0, 1)$ mit $|x - y| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x - y|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{|x + y|}_{\leq 2} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

⑥ $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, \infty)$

Zeige: f ist nicht gleichm. stetig

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta: |x_\delta - y_\delta| < \delta: |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$

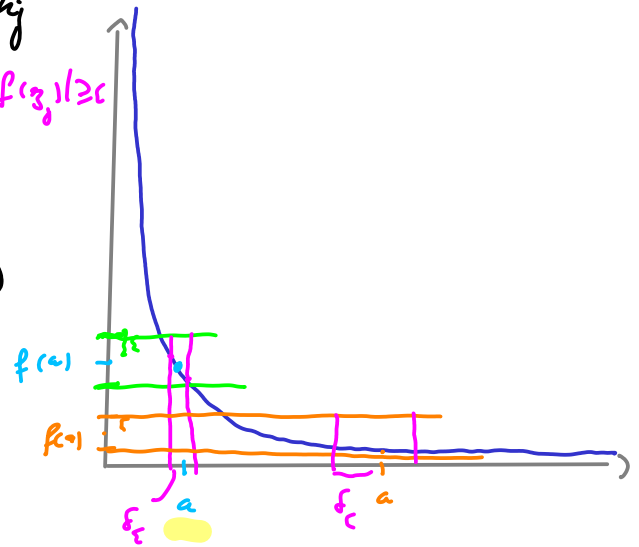
Setze $\varepsilon := 1$. Sei $\delta > 0$ gegeben.

Setze: $x_\delta := \delta$, $y_\delta := \frac{\delta}{1+\delta} \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow |x_\delta - y_\delta| = \delta - \frac{\delta}{1+\delta} < \delta$$

aber: $|f(x_\delta) - f(y_\delta)|$

$$\left| \frac{1}{\delta} - \frac{1+\delta}{\delta} \right| = \frac{\delta}{\delta} = 1 = \varepsilon \geq \varepsilon$$



Problem: Der Graph hat in der Nähe der 0 eine unbeschränkte Steigung!

§ 15 Konvergenz von Funktionenfolgen

A) Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Def. 15.1

① Sei $f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf U .

② Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf U .

• $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent; $(\Leftrightarrow) \forall x \in U \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

• Dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ Grenzfunktion von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir sagen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf U punktweise gegen f .

d.h. $\forall x \in U \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon, x} : \forall n \geq n_{\varepsilon, x} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

③ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf U gleichmäßig gegen f

$(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \wedge \forall x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

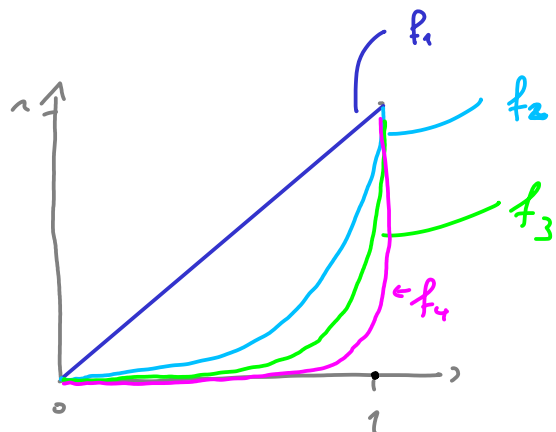
Bem. 15.2

$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ glw. auf $U \Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise auf U

Bsp. 15.3:

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$$

$$\Rightarrow f_n(x) = x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1 & , x = 1 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise gegen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Bemerkung: f_n stetig $\forall n \in \mathbb{N}$,

aber $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ist nicht stetig!

Bew: $f_n \rightarrow f$ nicht gln. auf $[0, 1]$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon : \exists n \geq n_\varepsilon \text{ \& \; } \exists x \in U : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Dann: Setze $\varepsilon := \frac{1}{4} > 0$. Sei n_ε beliebig.

Setze: $n := \max\{2, n_\varepsilon\} \geq n_\varepsilon$ und $x := \frac{1}{n^2} \in [0, 1]$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon$$

□

Satz 15.4

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit KR r .

Für $n \in \mathbb{N}$ setze: $f_n : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$

Dann: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $(-r, r)$ punktweise

gegen $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$

, $\forall 0 \leq R < r : (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-R, R]$
gln. gegen f

Bew:

$$\cdot \text{ D-f. } \Rightarrow f_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k = f(x) \quad \forall x \in (-r, r)$$

$$\text{d.h. } f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Zeige: f konv. auf $[-R, R]$ gln. gegen f .

$$\text{d.h. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \text{ \& \; } \forall x \in [-R, R] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Beachte: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot R^k$ ist konvergent

$\Rightarrow$ Folge der Restglieder ist eine Nullfolge!

$$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot R^k \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Sei $n \geq n_2$ und $x \in [-R, R]$.

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cdot x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k < \varepsilon$$

□

Bsp. 15.5

$f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ konvergiert auf $(-1, 1)$

punktweise gegen $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Beh: $f_n \rightarrow f$ nicht glm. auf $(-1, 1)$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \forall n_2 : \exists n \geq n_2 \text{ u. } x \in (-1, 1) : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

Satz 15.1: $\varepsilon := 1 > 0$. Sei n_2 gegeben.

Behaupte, $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^{n_2+1}}{1-x}$ ist stetig

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \exists x \in (0, 1) : 1 \leq g(x) = \frac{x^{n_2+1}}{1-x}$$

$$\Rightarrow |f_{n_2}(x) - f(x)| = \sum_{k=n_2+1}^{\infty} x^k = x^{n_2+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^{n_2+1} \cdot \frac{1}{1-x} = g(x) \geq 1$$

□

B) Gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen

Satz 15.6

Sei $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf U , $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow{u} f$ glm. auf U .

Dann: f ist stetig auf U .

Beweis: Sei $a \in U$.

Zeige: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in U \text{ mit } |x - a| < \delta_\varepsilon : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

• $f_n \rightarrow f$ glm. auf $U \Rightarrow \underbrace{\exists n_{\frac{\varepsilon}{3}} : \forall n \geq n_{\frac{\varepsilon}{3}} \exists x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}}_{(*)}$

• f_{n_ε} ist stetig an a

$\Rightarrow \underbrace{\exists \delta > 0 : \forall x \in U \text{ mit } |x - a| < \delta : |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}}_{(**)}$

• Satz 15.6: $\delta_\varepsilon := \delta > 0$

Sei $x \in U$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x) - f(a)| = |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) + f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a) + f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} (*)} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} (**)} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} (*)} < \varepsilon$$

□

Kor. 15.7

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ ein PR über $\mathbb{R}$ mit $\forall R > 0$.

Dann: $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist stetig auf $(-r, r)$.

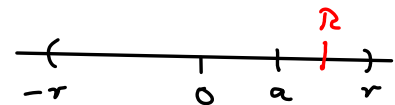
Beweis:

Sei $a \in (-r, r)$. Satz 15.6: $R := \frac{|a| + r}{2} \in (0, r)$

$\Rightarrow$ 15.6 $f_n: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$

konv. glm. auf $[-R, R]$

gegen $f|_{[-R, R]}$



$\Rightarrow$ f_n stetig als PF $f|_{[-R, R]}$ stetig $\Rightarrow f$ stetig in a .

□

Bsp. 15.8:

$\exp, \cos, \sin$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$. □

§ 16 Exponentialfunktion, Logarithmus & trigonometrische Funktionen

A) Exponential- und Logarithmusfunktionen

Satz 16.1:

Die Exponentialfunktion $\exp: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

Inbesondere gelten:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty.$$

Beweis:

Sn: $z > 0$.

$$\Rightarrow \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{n!}}_{>0} \geq \frac{z^1}{1!} + \frac{z^0}{0!} = z + 1 > 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z + (-z)) = \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$$

$$\Rightarrow \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} > 0$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\exp) \subseteq (0, \infty)$$

Sn: $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$.

$$\Rightarrow \exp(y) = \exp(y - x + x) = \underbrace{\exp(y - x)}_{\substack{>0 \\ (*)}} \cdot \exp(x) > \underbrace{1 \cdot \exp(x)}_{\exp(x)}$$

$\Rightarrow \exp$ ist streng monoton wachsend und nach 15.8 stetig

$\Rightarrow \exp: (-\infty, \infty) \rightarrow (c, d)$ ist bijektiv

14.21

$$\text{wobei} \quad c = \inf(\text{Im}(f)) \stackrel{14.21}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$$

$$d = \sup(\text{Im}(f)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)$$

$$\text{Beh.: } x > 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 1 + x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow d = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$$

$$\cdot \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow c = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\text{Also: } \text{Im}(\exp) = (c, d) = (0, \infty)$$

□

Bem. 16.2:

$e := \exp(1)$ = Eulersche Zahl ist **irrational**

und $e \in (2, 3)$.

Def. 16.3:

Die Umkehrfunktion von $\exp$ heißt **(natürliche) Logarithmus**,

$$\ln: (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty).$$

Satz 16.4:

Der natürliche Logarithmus ist **stetig, bijektiv** und **streng monoton wachsend**.

Inbesondere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

Beweis:

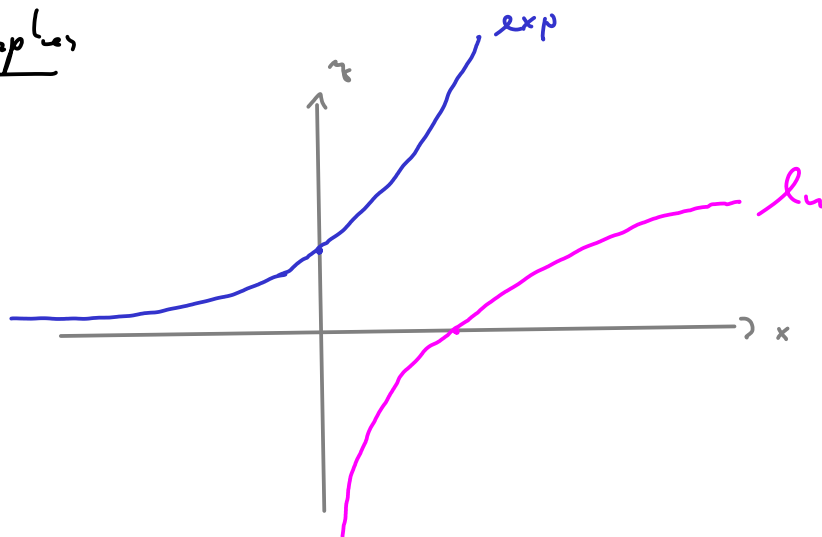
$$14.21 + 16.1 + 14.22.$$

□

Bem. 16.5:

Bemerkung: $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$
 $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$

Skizze der Graphen



Def. 16.6

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Satz: $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$

Bem.: $e^x = \exp(x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}) = \exp(x)$

Satz 16.7:

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $a \neq 1$.

(a) Die Abb. $\exp_a : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$

heißt die **Exponentialfunktion zur Basis a** und sie ist stetig, bijektiv und streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend, } a > 1 \\ \text{fallend, } a < 1 \end{cases}$.

(b) Die Umkehrabb.: $\log_a : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ von $\exp_a$

heißt **Logarithmus zur Basis a** und sie ist stetig, bijektiv und streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend, } a > 1 \\ \text{fallend, } a < 1 \end{cases}$.

Beweis:

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$.

$\Rightarrow \ln(a) > 0$, denn $\ln(1) = 0$ und $\ln$ str. mon. wach.

Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(a) < y \cdot \ln(a)$$

$$\Rightarrow \exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln(a)) < \exp(y \cdot \ln(a)) = \exp_a(y)$$

$\exp$ str. wach.

$\Rightarrow \exp_a$ streng monoton wachend

Zudem: $g: X \mapsto x \cdot \ln(a)$ stetig & $\exp$ stetig

$$\Rightarrow \exp_a = \exp \circ g \text{ stetig}$$

Beachte: $\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x \cdot \ln(a)}_{\rightarrow \infty} = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x \cdot \ln(a)}_{\rightarrow -\infty} = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x \cdot \ln(a)) = \infty$$

$\exp$ stetig

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x \cdot \ln(a)) = 0$$

$\Rightarrow \text{Im}(\exp_a) = (0, \infty)$ und $\exp_a$ ist bijektiv

Teil b) für $a > 1$ folgt aus 14.21 + (a) + 14.22.

Der Fall $a < 1$ geht analog!

(3)

B) Potenz- und Logarithmusgesetze

Kor. 16.8:

Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(c) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

(d) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(e) $\forall n \in \mathbb{Z}$ stimmen die Def. von a^n in 7.9 & 16.6 überein.

(f) $\forall p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q \geq 2$: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Insb. Def. 9.8 & 16.6 für $a^{\frac{1}{q}}$ stimmen überein.

Beweis:

$$\textcircled{a} \quad a^{x+y} = \exp((x+y) \cdot \ln(a)) = \exp(x \cdot \ln(a) + y \cdot \ln(a)) \\ = \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \exp(y \cdot \ln(a)) = a^x \cdot a^y$$

$$\textcircled{b} \quad a^x = \exp(x \cdot \ln(a)) \Rightarrow \ln(a^x) = \ln(\exp(x \cdot \ln(a))) = x \cdot \ln(a) \\ \Rightarrow (a^x)^y = \exp(y \cdot \ln(a^x)) = \exp(y \cdot x \cdot \ln(a)) = a^{x \cdot y}$$

$$\textcircled{c} \quad (a \cdot b)^x = \exp(x \cdot \ln(a \cdot b)) \stackrel{16.9 \text{ d}}{=} \exp(x \cdot (\ln(a) + \ln(b))) \\ = \exp(x \cdot \ln(a) + x \cdot \ln(b)) = \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \exp(x \cdot \ln(b)) = a^x \cdot b^x$$

$$\textcircled{d} \quad a^x \cdot a^{-x} \stackrel{\textcircled{a}}{=} a^{x+(-x)} = a^0 = \exp(0 \cdot \ln(a)) = \exp(0) = 1$$

$$\Rightarrow a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\textcircled{e} \quad \text{Sei } n \in \mathbb{Z} \text{ und } n > 0 \Rightarrow a^n \stackrel{\text{Def. 7.9}}{=} a \cdot \dots \cdot a \\ a^n \stackrel{\text{f}}{=} \exp(n \cdot \ln(a)) \quad \text{! nicht zu!}$$

$$\text{Zu } \textcircled{d}: \quad n=1: \quad a \stackrel{!}{=} \exp(\ln(a)) \quad \checkmark \quad 16.6.$$

$$n-1 \mapsto n: \quad \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} = a \cdot (\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n-1}) = \exp(\ln(a)) \cdot \exp((n-1) \cdot \ln(a)) \stackrel{\textcircled{c}}{=} \\ \exp(n \cdot \ln(a)) = \exp((1 + (n-1)) \cdot \ln(a))$$

$$\text{Wurde } n=0: \quad 1 = \exp(0 \cdot \ln(a)) \quad \checkmark$$

$$\text{Wurde } n > 0: \quad a^{-n} \stackrel{7.9}{=} \frac{1}{a^n} \stackrel{7.9}{=} \frac{1}{a^n} \stackrel{16.6}{=} a^{-n} \quad \textcircled{d}$$

$$\textcircled{f} \quad (a^{\frac{p}{q}})^q \stackrel{\textcircled{b}}{=} a^{\frac{p}{q} \cdot q} = a^p \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^{\frac{p}{q}})^q} = \sqrt[q]{a^p} \quad \boxed{f}$$

Kor. 16.9:

Seien $a, x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$ und $z \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{a} \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\textcircled{b} \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\textcircled{c} \quad \log_a(x^z) = z \cdot \log_a(x)$$

$$\textcircled{d} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

Beweis:

(a) Wenn $a \neq 1$, dann:

$$\exp_a \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right) = \exp \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \cdot \ln(a) \right) = \exp(\ln(x)) = x$$
$$\exp_a(\log_a(x))$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x)$$

$\exp_a$
injektiv

$$(b) \exp_a(\log_a(x \cdot y)) = x \cdot y = \exp_a(\log_a(x)) \cdot \exp_a(\log_a(y))$$

// 16.8(3)

$$\exp_a(\log_a(x) + \log_a(y))$$
$$\Rightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

$\exp_a$
injektiv

$$(c) x^z = \exp(z \cdot \ln(x)) \stackrel{a)}{=} \exp(z \cdot \log_a(x) \cdot \ln(a))$$
$$= \exp_a(z \cdot \log_a(x))$$

$$\Rightarrow \log_a(x^z) = \log_a(\exp_a(z \cdot \log_a(x))) = z \cdot \log_a(x)$$

$$(d) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \stackrel{b)}{=} \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) \stackrel{c)}{=} \log_a(x) - \log_a(y)$$

//

c) Die Zahl π

Satz 16.10

Der Sinus besitzt eine kleinste positive Nullstelle, die wir π nennen, und es gilt $\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$.

Beweis:

Sei $x \in (0, 4]$ beliebig.

$$\text{Entwicklung:} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{Satz 16.1:} \quad a_n := \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad n \geq 1.$$

Zu zeigen: $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend

$$\text{Denn: } a_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x^{2n+1} \cdot x \cdot x}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)} \leq \underbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{a_n} \cdot \frac{16}{20} < a_n$$

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sin(x) - x$ ist absolut konvergent

$$\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} = (|(-1)^n \cdot a_n|)_{n \geq 1} \text{ ist Nullfolge}$$

Beweis des Leibniz-Kriteriums mit $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot a_k$

$$\Rightarrow S_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \leq S_4$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x + S_1 \leq \sin(x) \leq x + S_4 \\ \parallel \\ x - \frac{x^3}{6} \leq x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \end{array}} \quad (*)$$

$$\text{Für } x=1: \Rightarrow \sin(1) \geq 1 - \frac{1^3}{6} > 0$$

$$\text{Für } x=4: \sin(4) \leq S_4(4) + 4 = -\frac{268}{405} < 0$$

Also: $\sin$ stetig, $\sin(1) > 0$ und $\sin(4) < 0$

$$\Rightarrow \text{ZWS } \exists x \in [1, 4] : \sin(x) = 0$$

$$\Rightarrow A := \{x \in [1, 4] \mid \sin(x) = 0\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists \pi := \inf(A)$$

$$\text{Zu zeigen: } \sin(\pi) = 0$$

$$\pi = \inf(A) \xRightarrow{\text{M. 2.2}} \exists (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } b_n \in A, \text{ monoton fallend und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pi$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \sin \text{ stetig} \\ \parallel \\ 0 \end{array} \quad \sin(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin(\pi) \Rightarrow \sin(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \pi = \min(A) \quad \text{und} \quad \pi > 1, \text{ weil } \sin(1) > 0$$

Zu zeigen: $\forall x \in (0, \pi) : \sin(x) > 0$

1. Fall: $x \in [1, \pi)$

$A_{\geq 0} : \sin(x) = 0 \Rightarrow x \in A \text{ u. } x < \pi \quad \hookrightarrow \pi = \min(A)$

$A_{< 0} : \sin(x) < 0$

$\Rightarrow \sin(1) > 0, \sin(x) < 0 \xRightarrow{\text{ZWS}} \exists y \in [1, x] : \sin(y) = 0$

$\Rightarrow y \in A \text{ u. } y < \pi \quad \hookrightarrow \pi = \min(A)$

Also: $\sin(x) > 0$

2. Fall: $x \in (0, 1)$

$\Rightarrow \sin(x) \geq s_1(x) + x = x - \frac{x^3}{6} \geq x - \frac{x}{6} = \frac{5}{6} \cdot x > 0$

Bem. 16.11:

Wir wissen zur Zeit nur:

$1 < \pi < 4$

Zeigen später: $\pi \approx 3.14159 \dots$

D) Der Cosinus

Satz 16.12

$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist stetig, streng monoton fallend und bijektiv.

Beweis:

Seien $x, y \in [0, \pi]$ mit $x < y$.

Z.z.: $\cos(x) > \cos(y)$

$\cdot \cos(y) = \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right) \stackrel{AT}{=} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$

$\cdot \cos(x) = \cos\left(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) \stackrel{AT}{=} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(-\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{y-x}{2}\right)$

$= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) + \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos(x) - \cos(y) = 2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)}_{\in (0, \pi)} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)}_{\in (0, \pi)} > 0$

Daher: $0 \leq x < \frac{y+x}{2} < y \leq \pi$

$0 < \frac{y-x}{2} < y < \pi$

Also: $\cos$ streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ und stetig

$$\Rightarrow_{14.21} \cos : [0, \pi] \longrightarrow \left[\lim_{x \rightarrow \pi} \cos(x), \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \right] \text{ bijektiv}$$

$\begin{matrix} \text{// } \cos \text{ stetig} & \text{// } \cos \text{ stetig} \\ \cos(\pi) & \cos(0) \\ \text{"} & \text{"} \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{0^{2k}}{(2k)!} = 1 \end{matrix}$

Definition: $\cos^2(\pi) = 1 - \underbrace{\sin^2(\pi)}_{=0} = 1$

$$\Rightarrow \cos(\pi) \in \{1, -1\}$$

$$\Rightarrow \cos(\pi) = -1, \text{ weil } \cos(0) = 1 \text{ und } \cos \text{ streng monoton fallend auf } [0, \pi].$$

□

E) Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Satz 16.13

Ⓐ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \pi) = -\sin(x) \text{ und } \cos(x + \pi) = -\cos(x)$

Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x) \in [-1, 1] \text{ und } \cos(x) \in [-1, 1]$

Ⓒ

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1

Ⓓ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \text{ und } \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Ⓔ $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \text{ und } \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

Ⓕ $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.

Ⓖ $\sin(x) = 0 \iff x \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(x) = 0 \iff x \in \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis:

Ⓐ $\sin(x + \pi) \stackrel{At}{=} \sin(x) \cdot \overbrace{\cos(\pi)}^{-1} + \overbrace{\sin(\pi)}^{=0} \cdot \cos(x) = -\sin(x)$

$\cos(x + \pi) \stackrel{At}{=} \cos(x) \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - \sin(x) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} = -\cos(x)$

$$\textcircled{b} \quad 1 = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \geq |\sin(x)| \Rightarrow \sin(x) \in [-1, 1]$$

$$1 = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} \geq \sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)| \Rightarrow \cos(x) \in [-1, 1]$$

$$\textcircled{c} \quad x=0: \quad \sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!} = 1$$

$$x=\pi: \quad \text{Ab. 10} \Rightarrow \sin(\pi) = 0$$

$$\text{Ab. 12} \Rightarrow \cos(\pi) = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad -1 = \cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{A7}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}_{\leq 1} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \quad \wedge \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Downarrow \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Downarrow \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{1, -1\}$$

$$\Downarrow \sin(y) > 0 \quad \forall y \in (0, \pi) \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \in (0, \pi) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}: \quad 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{A7}{=} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \quad (*)$$

$$\text{Zudem:} \quad 1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\text{Bemerk:} \quad \sin(y) > 0 \quad \forall y \in (0, \pi) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cdot \cos \text{ str. mon. fallend auf } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset (0, \pi)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}: \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \stackrel{a)}{=} -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) \stackrel{a)}{=} -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\underline{x = 2\pi:} \quad \cos(2\pi) = \cos(\pi + \pi) \stackrel{②}{=} -\cos(\pi) \stackrel{③}{=} -(-\cos(0)) = 1$$

$$\sin(2\pi) = \sin(\pi + \pi) \stackrel{②}{=} -\sin(\pi) = 0$$

$$① \quad \cos(x + 2\pi) \stackrel{②}{=} -\cos(x + \pi) \stackrel{②}{=} \cos(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) \stackrel{③}{=} -\sin(x + \pi) \stackrel{③}{=} \sin(x)$$

$$② \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{AT}{=} \sin(x) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \cos(x) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

$$③ \quad \sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{③}{=} -\cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{streng monoton wachsend und bijektiv auf } [-1, 1]$$

$$④ \quad x = k \cdot \pi \stackrel{\substack{\Rightarrow \\ \text{Zahl} \\ \text{von } k}}{\Rightarrow} \sin(x) = 0$$

$$\sin(x) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 \leq x - k \cdot \pi < \pi$$

$$\Rightarrow \sin(x - k \cdot \pi) \stackrel{②}{=} \pm \sin(x) = 0$$

$$\stackrel{\substack{\Rightarrow \\ \pi \text{ unv. pos. Zahl} \\ \text{von } \sin}}{\Rightarrow} x - k \cdot \pi = 0 \Rightarrow x = k \cdot \pi$$

$$\cos(x) = 0$$

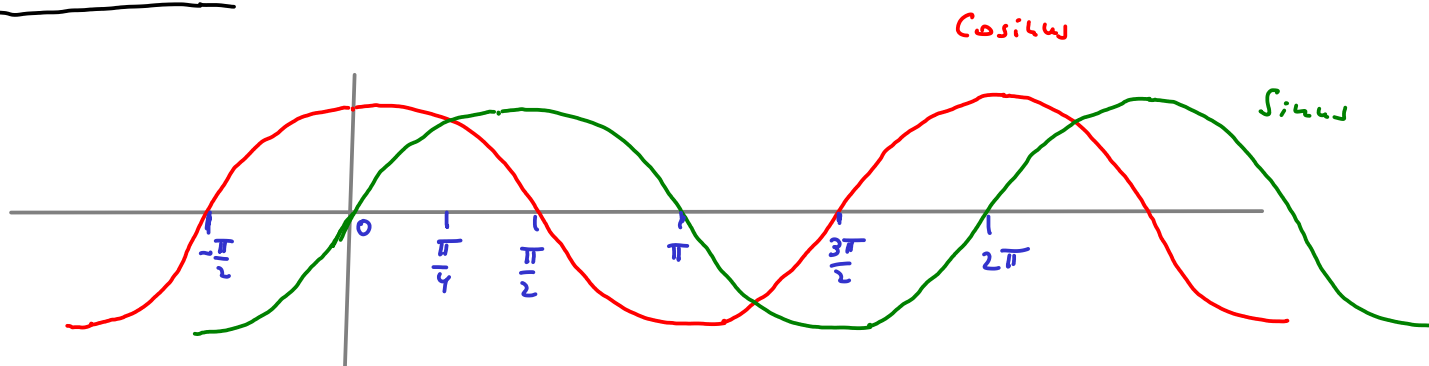
$$\stackrel{||}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ k \cdot \pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\stackrel{||}{\{ k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \}}$$

Bem. 16.14:

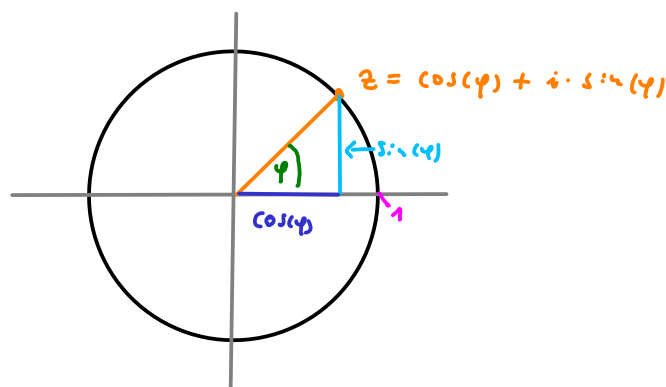


F) Polarkoordinaten

Bem. 16.15

Bem. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z| = 1 \iff \exists \varphi \in [-\pi, \pi) : z = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Dann: $z \in \mathbb{C}$ beliebig
 $\Rightarrow \exists \varphi \in [0, \pi) : z = |z| \cdot e^{i\varphi}$



Beweis:

$$\begin{aligned} \text{"} \Leftarrow \text{" } z &= \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow |z|^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \\ &\Rightarrow |z| = \pm 1 \quad \Rightarrow |z| = 1 \\ &\quad |z| \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{"} \Rightarrow \text{" } \text{Sei } z = a + ib \text{ mit } 1 = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - b^2 \leq 1 \Rightarrow a \in [-1, 1] = \cos([0, \pi])$$

$$\Rightarrow \exists x \in [0, \pi] : a = \cos(x)$$

$$\Rightarrow b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow b \in \left\{ \sin(x), -\sin(x) \right\}$$

$$\text{1. Fall: } b = \sin(x) \Rightarrow z = \cos(x) + i \cdot \sin(x) \Rightarrow \varphi = x$$

$$\text{2. Fall: } b = \sin(-x) \Rightarrow z = \cos(x) = \cos(-x) \Rightarrow z = \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) \Rightarrow \varphi = -x$$

$$\text{Also: } \varphi \in [-\pi, \pi] \text{ o.ä. } \varphi \in [-\pi, \pi)$$

Damit: $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{e^{i \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot k} \mid k = 0, \dots, n-1\}$
 $\uparrow$
 n -te Einheitspotenzen

" $\supset$ " $(e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot k})^n = e^{2\pi i \cdot k} = \underbrace{\cos(2\pi \cdot k)}_{=1} + i \cdot \underbrace{\sin(2\pi \cdot k)}_{=0} = 1$

" $\subseteq$ " $p = t^n - 1$ hat höchstens n Nullstellen

□

G) Weitere trigonometrische Funktionen

Def. 16.16

① $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ heißt Tangens.

② $\cot: \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ heißt Cotangens.

Satz 16.17

① $\tan(x) = -\tan(-x)$, $\cot(x) = -\cot(-x)$, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$, $\cot(x+\pi) = \cot(x)$

② $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv, punktsymm. zu 0.

③ $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton fallend, bijektiv, punktsymm. zu $\frac{\pi}{2}$.

Beweis:

① $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{-\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan(-x)$

$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$

analog für $\cot$!

② Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \cos(x) > \cos(y) > 0$, $0 \leq \sin(x) < \sin(y)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 $\cos$ str. m.f. auf $[0, \pi]$ $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\sin(0) = 0$ $\sin$ str. m.f. auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(y)$

$\Rightarrow \tan$ streng monoton wachsend auf $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \tan$ streng monoton wachsend auf $(-\frac{\pi}{2}, 0]$, also auch $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
 $\uparrow$
 $\tan$ punktsymm. zu 0 nach ①

Darmit: $\tan$ ist str. m. w. auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und stetig

$\Rightarrow \tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x))$ ist bijektiv

$$\text{Dabei: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos(x)} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Also: $\tan\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

② analog zu ①.

□

Satz 16.18 (Arcusfunktionen)

① $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, den sog. **Arcussinus** $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

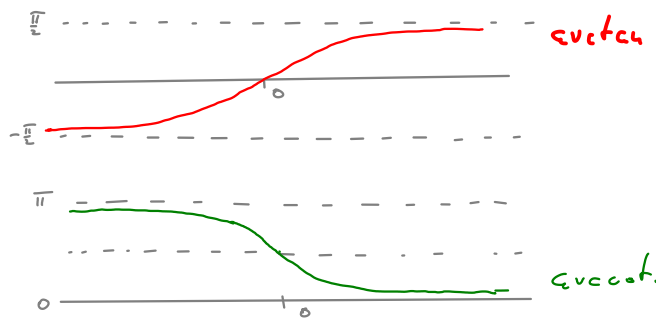
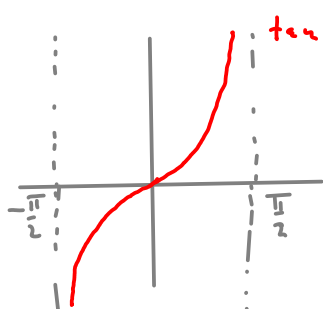
② $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion, den sog. **Arcuscosinus** $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

③ $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion, den sog. **Arcustangens** $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

④ $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine stetige, streng monoton fallende Umkehrfunktion, den sog. **Arcocotangens** $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

Bew: 14.21 + 16.12 + 16.13 + 16.17.

□



§ 17 Differenzierbarkeit

A) Der Differenzenquotient

Def. 17.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

Dann heißt $\text{Diff}_{f,a}: U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ der

Differenzenquotient von f an der Stelle a .

Sei $b \in U \setminus \{a\}$ fest gegeben.

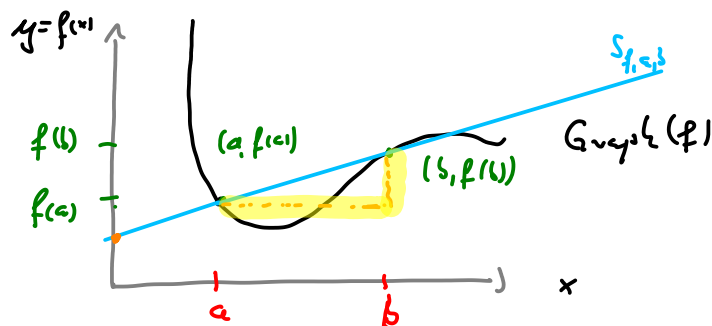
Satz: $S_{f,a,b}$ = Sekante an den Graphen von f durch a & b
= Gerade durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

Grundergleichung von $S_{f,a,b}$:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b - a}$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

$$= \underbrace{\text{Diff}_{f,a}(b)}_{\text{Steigung von } S_{f,a,b}} = \text{Steigung von } S_{f,a,b}$$



Bsp. 17.2:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^u, \quad u \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f,a}(x) = \frac{x^u - a^u}{x - a} = \sum_{h=0}^{u-1} a^h \cdot x^{u-1-h} = x^{u-1} + a \cdot x^{u-2} + \dots + a^{u-2} \cdot x + a^{u-1}$$

B) Differenzierbarkeit und die Ableitung.

Def. 17.3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$ ein Häufungspunkt von U .

(a) f heißt **differenzierbar in a** $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \text{Diff}_{f,a}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert

Wir nennen dann $f'(a) := \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ die **Ableitung** von f in a .

(b) f heißt **differenzierbar auf U**

: $\Leftrightarrow f$ ist differenzierbar in $a \quad \forall a \in U$

Insbesondere muß dann jedes $a \in U$ ein HP von U sein.

Wir nennen dann $f': U \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$ die **Ableitung** von f .

Bem. 17.4:

$s_{f,a,b}$ = Sekante zu Graph(f) durch a & b

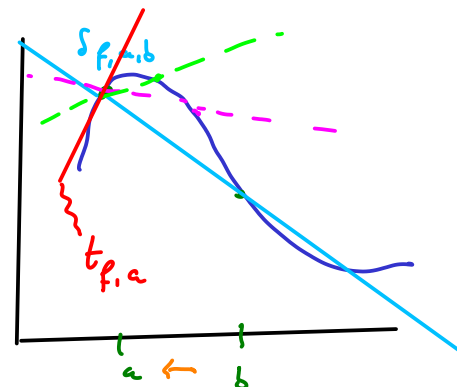
hat die Geradengleichung:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a)$$

$$\downarrow b \rightarrow a$$

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Gleichung der **Tangente** zu Graph(f) im Punkt $(a, f(a))$



Bsp. 17.5:

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto c$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f,a}(x) = \frac{c - c}{x - a} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

$\Rightarrow f$ ist diffbar auf $\mathbb{R}$ mit $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 0$

(b) $S: n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \quad n \cdot x \mapsto x^n, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^n, \quad a \in \mathbb{R}.$

$$\Rightarrow D: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k} \xrightarrow{x \rightarrow a} n \cdot a^{n-1}$$

$$\downarrow x \rightarrow a$$

$$a^k \cdot a^{n-1-k} = a^{n-1}$$

$\Rightarrow f$ ist diff.-bar auf $\mathbb{R}$ mit $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto n \cdot x^{n-1}$

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$

Beh: f ist in $a=0$ **nicht** diff.-bar!

Betrachte $(a_n)_{n \geq 1} = \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \geq 1}$

$$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad D: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} = \frac{|a_n|}{a_n} = (-1)^n$$

konvergiert **nicht** für $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} D: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existiert **nicht**

$\Rightarrow f$ nicht diff.-bar in $a=0$

Beh: $a \neq 0 \Rightarrow f$ diff.-bar in a mit $f'(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$

Bem. 17.6:

(a) Diff.-barkeit ist eine **lokale Eigenschaft**, d.h. ob f diff.-bar in a ist, hängt nur vom Verhalten von f in einer sehr kleinen Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ab!

(b) f ist **diff.-bar in a**

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existiert}$$

$$= f'(a)$$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = f(a) + c \cdot (x-a) + g(x) \wedge \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{|x-a|} = 0$

Dabei: $f'(a) = c \wedge g(x) = (D: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)) \cdot (x-a)$

C) Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Satz 17.7

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in $a \Rightarrow f$ stetig in a

Bew:

• f diff. bar in $a \Rightarrow a$ ist ein HP von U

• z.z.: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) + f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) \\ &\quad \downarrow x \rightarrow a \quad \downarrow x \rightarrow a \quad \downarrow x \rightarrow a \\ &\quad f'(a) \cdot \underbrace{(x - a)}_{=0} + f(a) = f(a) \end{aligned}$$

□

Bsp. 17.8:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$ ist stetig in $a=0$, nicht diff. bar in $a=0$

D.h. die Umkehrung von 17.7 ist falsch!

D) Ableitungsregeln ~ Linearität, Produkt- und Quotientenregel

Prop. 17.9 (Linearität)

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in $a \in U$, und $c, d \in \mathbb{R}$.

Dann: $c \cdot f + d \cdot g$ ist diff. bar in a mit $(c \cdot f + d \cdot g)'(a) = c \cdot f'(a) + d \cdot g'(a)$.

Beweis:

$$\text{Diff}_{c \cdot f + d \cdot g, a}(x) = \frac{(c \cdot f(x) + d \cdot g(x)) - (c \cdot f(a) + d \cdot g(a))}{x - a}$$

$$\begin{aligned} &= c \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + d \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} c \cdot f'(a) + d \cdot g'(a) \\ &\quad \downarrow x \rightarrow a \quad \downarrow x \rightarrow a \\ &\quad f'(a) \quad g'(a) \end{aligned}$$

□

Bsp. 17.10

$$\text{Sei } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k.$$

$$\Rightarrow f \text{ ist diff. bar auf } \mathbb{R} \text{ mit } f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$$

17.9 + 17.5

Prop. 17.11 (Produktregel)

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in $a \in U$.

Dann: $f \cdot g: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist diff. bar in a mit $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

Beweis:

$$\text{Diff}_{f \cdot g, a}'(x) = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

$$= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\downarrow x \rightarrow a} \cdot \underbrace{g(x)}_{\downarrow x \rightarrow a} + f(a) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{\downarrow x \rightarrow a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Weil g stetig in a nach 17.7

Prop. 17.12 (Quotientenregel)

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar in $a \in U$ mit $g(a) \neq 0$.

Dann: $\frac{f}{g}: U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist diff. bar in a

$$\text{mit } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Bew:

z.z. a ist HP von

$$V := U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \quad \text{!} \quad a$$

$g(a) \neq 0$

a ist HP von U und g ist stetig in a (nach 17.7)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0 \quad \xRightarrow{13.10b} a \text{ ist HP von } U.$$

Dazu:

$$\text{Diff}_{\frac{1}{g}, a}(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a)}}{x - a}$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(a)} \cdot \underbrace{\left(- \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow a \\ g'(a)}} = \frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Rest folgt aus 17.11 erweitert auf $f \cdot \frac{1}{g}$.

□

Bsp. 17.13

f u. g rationale Fkt. $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist diff. bzw.

z.B.: $h: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad n \geq 1$

$\Rightarrow h$ ist diff. bzw. auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\text{mit } h'(x) = - \frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = - \frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = - \frac{n}{x^{n+1}} = -n x^{-n-1}$$

E) Ableitungsregeln - Ableitung der Umkehrfunktion + Kettenregel

Satz 17.14 (Ableitung der Umkehrfkt.)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ **stetig** und **streng monoton**.

Wenn f in $a \in I$ **dif. bar** ist mit $f'(a) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: f(I) \rightarrow \mathbb{R} \text{ dif. bar in } b = f(a) \text{ mit } (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Bew:

17.21 $\Rightarrow f(I)$ ist ein Intervall & $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ stetig & bijektiv

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f(I) \setminus \{b\}$ mit $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$.

$$\Rightarrow x_n := f^{-1}(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$$

$\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $I \setminus \{a\}$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f,a}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} \text{Diff}_{f,a}(x) = f'(a)$$

Wie f^{-1} bijektiv & $y_n \neq b$

$$\Rightarrow \text{Diff}_{f^{-1},b}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\text{Diff}_{f,a}(x_n)}$$

$$\stackrel{17.7}{\Rightarrow} \exists \lim_{y \rightarrow b} \text{Diff}_{f^{-1},b}(y) = \frac{1}{f'(a)}$$

$\frac{1}{f'(a)} \checkmark n \rightarrow \infty$

[3]

Bsp. 17.15: $n \geq 2$

$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty): x \mapsto x^n$ ist str. monoton wachsend, stetig

und dif. bar auf $[0, \infty)$ mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$

$\stackrel{17.14}{\Rightarrow} \sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty): y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$ dif. bar in $y \quad \forall y \in (0, \infty)$

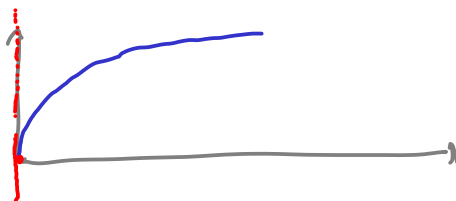
$$\text{mit } (\sqrt[n]{\cdot})': (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \frac{1}{f'(\sqrt[n]{y})} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot y^{\frac{n-1}{n}}} \\ = \frac{1}{n \cdot y^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

Bemerkung: $\sqrt[n]{\cdot}$ ist nicht diff'bar in $a=0$!

dazu: $a_k = \frac{1}{k^n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

außerdem: $D_{\sqrt[n]{\cdot}, 0}(a_k) = \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{k^n}} - 0}{\frac{1}{k^n} - 0} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^n}} = k^{n-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} D_{\sqrt[n]{\cdot}, 0}(x) \Rightarrow \sqrt[n]{\cdot}$ nicht diff'bar in 0



Insbesondere: $n=2$

$\sqrt{\cdot}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist diff'bar auf $(0, \infty)$
mit $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Prop. 17.16 (Kettenregel)

Seien $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $J_n(f) \subseteq V$ und $a \in U$.

Wenn f diff'bar in a und g diff'bar in $f(a)$, dann

$g \circ f$ ist diff'bar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

äußere Ableitung $\times$ innere Ableitung

Beweis:

Satz: $h: V \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto \begin{cases} D_{g, f(a)}(y) = \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}, & y \neq f(a) \\ g'(f(a)) & , y = f(a) \end{cases}$

$\Rightarrow$
 g diff'bar in $f(a)$ $\left. \begin{array}{l} h(y) \xrightarrow{y \rightarrow f(a)} g'(f(a)) = h(f(a)) \\ \text{d.h. } h \text{ ist stetig in } f(a) \end{array} \right\} (*)$

F) Stetige Differenzierbarkeit

Def. 17.18: Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

① f heißt **stetig differenzierbar** $\Leftrightarrow f$ ist diff.-bar auf U & f' ist stetig auf U .

② Wir definieren **k -fache Differenzierbarkeit** rekursiv:

• $f^{(0)} := f$

• Für $k \geq 1$: f heißt **k -fach differenzierbar** $\Leftrightarrow f^{(k-1)}$ ist diff.-bar

• $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$

Notation: $f'' := f^{(2)}$, $f''' := f^{(3)}$

③ f heißt **k -fach stetig differenzierbar** $\Leftrightarrow f$ k -fach diff.-bar und $f^{(k)}$ stetig auf U

Notation: $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) := \{f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } k\text{-fach stetig diff.-bar}\}$

④ f heißt **∞ -fach differenzierbar** $\Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) \quad \forall k \geq 1$

Notation: $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) = \bigcap_{k \geq 1} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$

Bsp. 17.19:

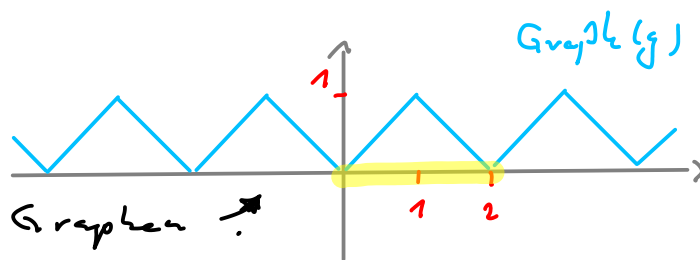
① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

ist differenzierbar, aber f' ist in $x=0$ **nicht** stetig!

② **Polynomfunktionen** und **rationale Funktionen** sind ∞ -fach diff.-bar, da die Ableitungen wieder Polynomfkt. oder rationale Fkt. sind!

Bem. 17.20

Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die periodische Fkt. mit folgendem Graphen:



$\Rightarrow g$ ist stetig, g nur in $x \in \mathbb{Z}$ nicht diff.-bar

Definiere: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^n \cdot x)}{2^n}$

$\Rightarrow f$ ist stetig, aber f ist unipendentes diff.-bar

Wie sieht man die Stetigkeit?

Satz: $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{g(2^k \cdot x)}{2^k}$

ist stetig als Summe stetiger Funktionen

Klar: $f_n \rightarrow f$ punktweise auf $\mathbb{R}$.

Zeige: $f_n \rightarrow f$ glm. auf $\mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g(2^k \cdot x)}{2^k} \leq 1$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

unabh. von x !
 $\downarrow n \rightarrow \infty$
 0

Also: f ist als glm. GL von stetigen Fkt. stetig!

§ 18 Der Mittelwertsatz und seine Anwendungen

A) Notwendige Bedingung für Extremstellen

Def. 18.1

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$.

(a) f hat in a ein **globales Maximum** $\Leftrightarrow \forall x \in U : f(x) \leq f(a)$

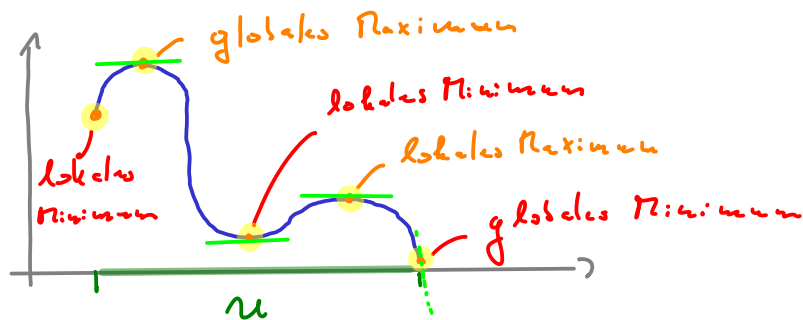
(b) f hat in a ein **lokales Maximum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in U \cap U_\delta(a) : f(x) \leq f(a)$

(c) f hat in a ein **globales Minimum** $\Leftrightarrow \forall x \in U : f(x) \geq f(a)$

(d) f hat in a ein **lokales Minimum** $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in U \cap U_\delta(a) : f(x) \geq f(a)$

(e) a heißt **Extremstelle** und $f(a)$ **Extremum** von f

$\Leftrightarrow f$ hat in a ein **lokales Maximum** oder **Minimum**



Prop. 18.2 (Notwendiges Kriter. für Extremstellen)

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und f sei **diffbar** in $c \in (a, b)$.

Wenn f in c eine **Extremstelle** hat, dann gilt: $f'(c) = 0$.

Beweis:

1. Fall: f hat in c ein **lok. Max.**

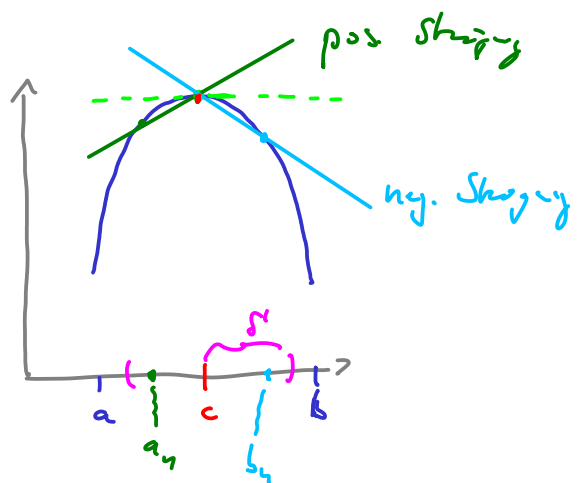
$$\Rightarrow \exists \delta > 0 ; \forall x \in (a, b) \cap U_\delta(c) : f(x) \leq f(c)$$

$$\text{Setze: } \delta' := \min\{\delta, c-a, b-c\} > 0$$

$$\Rightarrow U_{\delta'}(c) = (c-\delta', c+\delta') \subseteq (a, b) \cap U_\delta(c)$$

$$\text{Für } n \geq 2 \text{ setze: } a_n := c - \frac{\delta'}{n} \in U_{\delta'}(c), \quad b_n := c + \frac{\delta'}{n} \in U_{\delta'}(c)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $c \quad \quad c$



$$\Rightarrow \quad \underbrace{0 \leq \frac{\overbrace{f(a_n) - f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{a_n - c}_{< 0}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(c) \Rightarrow 0 \leq f'(c)$$

$$\underbrace{0 \geq \frac{\overbrace{f(b_n) - f(c)}^{\leq 0}}{\underbrace{b_n - c}_{> 0}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(c) \Rightarrow 0 \geq f'(c)$$

$\downarrow$
 $f'(c) = 0$
 $\uparrow$

2. Fall: f hat lok. Min. in c

$\Rightarrow -f$ " " Max. in c

$$\Rightarrow 0 = (-f)'(c) = -(f'(c)) \Rightarrow f'(c) = 0 \quad (3)$$

Bsp. 12.3:

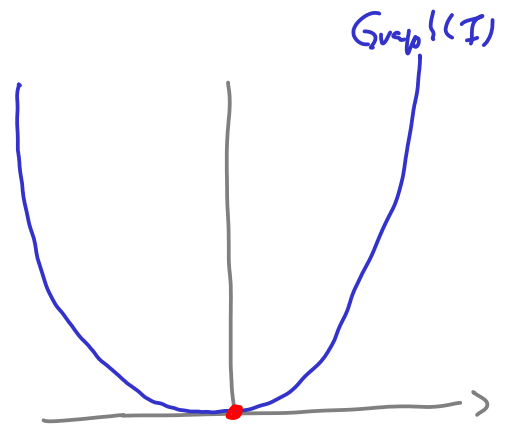
(a) $n \geq 2$ und n gerade:

$$\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^n$$

$\Rightarrow f$ hat in 0 globales Minimum,

$$\text{weil } f(x) = x^n \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{und } f(0) = 0$$



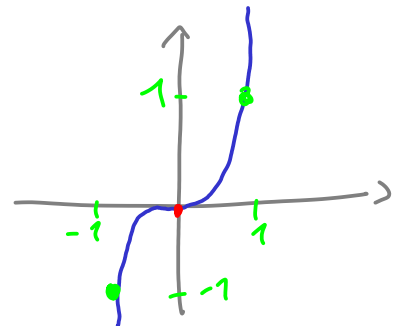
$$\text{Zudem: } f'(x) = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow f'(0) = 0$$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^3$

$\Rightarrow f$ hat in $x=0$ keine Extremstelle,

$$\text{weil: } x^3 = f(x) < 0 \quad \forall x < 0 \quad \text{und}$$

$$x^3 = f(x) > 0 \quad \forall x > 0$$



ABER: $f'(x) = 3 \cdot x^2 \stackrel{f(0)}{\Rightarrow} f'(0) = 0$, l.l. $f' = 0$ ist keine hinreichende Bed. für Extremstelle!

Bem. 18.4:

Auch wenn f auf $[a, b]$ definiert und in a & b diffbar ist, macht 18.2 keine Aussage für $c=a$ oder $c=b$.

Denn: $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

$\Rightarrow f$ hat in $x=-1$ ein lok. Minimum &
in $x=1$ ein lok. Maximum,

Denn: $1 = f(1) \geq x^3 \geq f(-1) = -1$
 $\forall x \in [-1, 1]$

Aber: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3 \neq 0 \neq 3 = f'(-1)$

B) Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz

Satz von Rolle 18.5

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b) mit $a < b$.

Wenn $f(a) = f(b)$, dann: $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

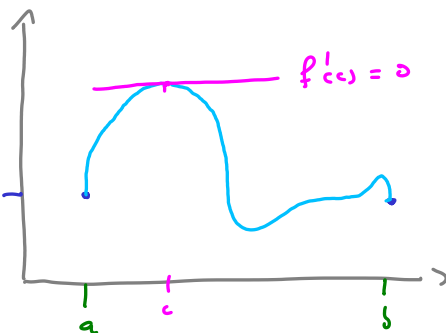
Beweis:

1. Fall: $f = \text{konstant}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow$ jedes c in (a, b) tut's $\checkmark$

$f(a) = f(b)$



2. Fall: f nicht konstant $\Rightarrow \exists y \in (a, b) : f(y) \neq f(a) = f(b)$

Fall 2.1: $f(y) > f(a) = f(b)$

f stetig auf $[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : f(x) \leq f(c) \Rightarrow c \in (a, b)$
18.16

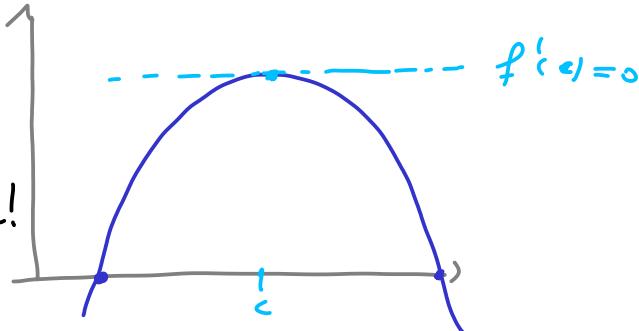
$\Rightarrow f'(c) = 0$
18.2

Fall 2.2: $f(y) < f(a) = f(b)$. analog.

18.2

Bem. 18.6:

Eine diff. bar Fkt. hat zwischen
je zwei Nullstellen stets ein Extremum!



Mittelwertsatz 18.7

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und diff. bar auf (a, b) mit $a < b$.

$$\text{Dann: } \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Beweis:

$$\text{Setze: } g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$\Rightarrow g$ ist stetig auf $[a, b]$ und diff. bar auf (a, b)

$$\text{mit } g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0$$

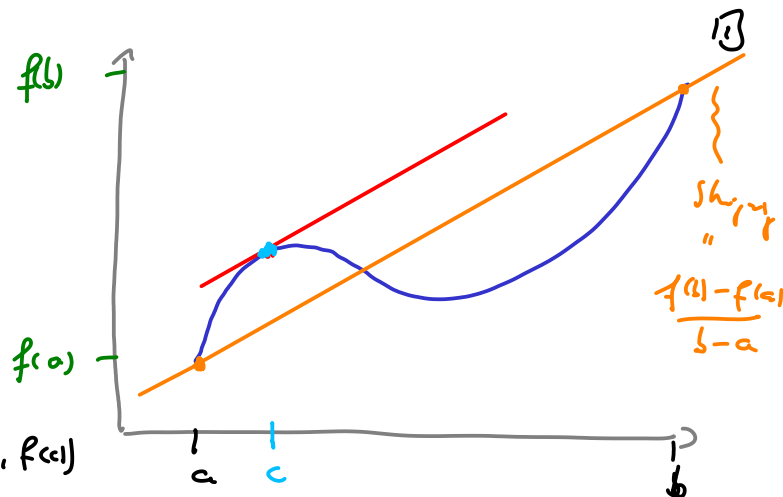
$$\stackrel{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a, b) : 0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bem. 18.8:

$$\text{MWS} \Rightarrow \exists c \in (a, b)$$

s.d. Steigung der Sekante
durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

$\hat{=}$ Steigung der Tangente in $(c, f(c))$



Bsp. 18.9:

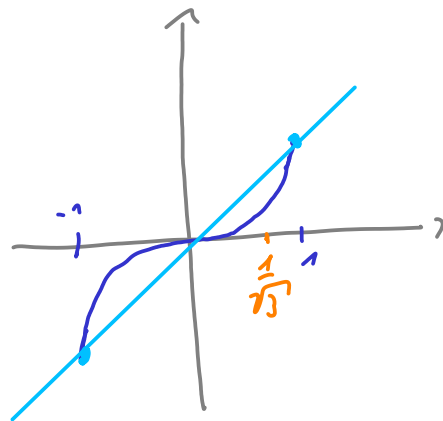
$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

ist stetig & diffbar auf $[-1, 1]$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 \stackrel{!}{=} \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Kor. 18.10 (Allgemein NWS der Differenzrechnung)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b) mit $a < b$.

Dann: $\exists c \in (a, b) : f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$.

Beweis:

$$\text{Setze } h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot (g(b) - g(a)) - g(x) \cdot (f(b) - f(a))$$

$\Rightarrow h$ stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b)

$$\text{mit } h(a) = f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a) = h(b)$$

$$\stackrel{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a, b) : 0 = h'(c) = f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) - g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$$

C) Anwendungen des Mittelwertsatzes

C.1) Konstante Funktionen

Prop. 18.11 (Kriterium für Konstanzheit)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b) mit $a < b$.

Wenn $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$, dann ist f konstant auf $[a, b]$.

Beweis: Sei $x \in (a, b]$ fest.

$\Rightarrow f|_{[a, x]}$ ist stetig auf $[a, x]$ und diffbar auf (a, x)

$\stackrel{MWS}{\Rightarrow} \exists c \in (a, x) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$

□

C.2) Monotonie und Ableitung

Prop. 18.12: (Kriterium für Monotonie)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b) mit $a < b$.

(a) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$.

(b) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf $[a, b]$.

Beweis:

(a) Seien $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$.

$\Rightarrow f|_{[x, y]}$ ist stetig auf $[x, y]$ und diffbar auf (x, y)

$\stackrel{MWS}{\Rightarrow} \exists c \in (x, y) : f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

$\Rightarrow f(y) - f(x) = \underbrace{f'(c)}_{> 0} \cdot \underbrace{(y - x)}_{> 0} > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$.

(b) analog.

□

Bsp. 18.13: Sei $n \geq 1$

$\Rightarrow f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend!

Zeige dies auch mit Hilfe von 18.12:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} > 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$\Rightarrow$ _{18.12} f ist str. monoton wachsend auf $[0, b]$ $\forall b > 0$

$\Rightarrow$ f " " " " " $[0, \infty)$

□

C.3) Hinreichendes Kriterium für Extremstellen

Prop. 18.14 (Hinreichendes Kriterium für Extremstellen)

Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 2-fach diff. bar und sei $c \in (a, b)$.

① $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0 \Rightarrow f$ hat ein lokales Maximum in c

② $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0 \Rightarrow f$ hat ein lokales Minimum in c

Beweis:

$$\textcircled{2} \text{ Vor. } \Rightarrow 0 < f''(c) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x) - \overset{=0}{f'(c)}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{x - c}$$

$$\text{Sei } \varepsilon := \frac{f''(c)}{2} > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in (a, b) \text{ mit } |x - c| < \delta_\varepsilon$$

$$\text{gilt: } \left| \frac{f'(x)}{x - c} - f''(c) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| -\frac{f''(c)}{2} = -\varepsilon < \frac{f'(x)}{x - c} - f''(c) < \varepsilon = \frac{f''(c)}{2} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{x - c} > -\frac{f''(c)}{2} + f''(c) = \frac{f''(c)}{2} > 0 \quad (*)$$

O.B.: δ_ε so klein, dass: $(c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \subsetneq (a, b)$

$$\text{Si: } x \in (c - \delta_\varepsilon, c) \Rightarrow x - c < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \cdot (x - c) = 0$$

(*)

$\Rightarrow$ f ist auf $[c - \delta_\varepsilon, c]$ streng monoton fallend

$$\text{Si: } x \in (c, c + \delta_\varepsilon) \Rightarrow x - c > 0$$

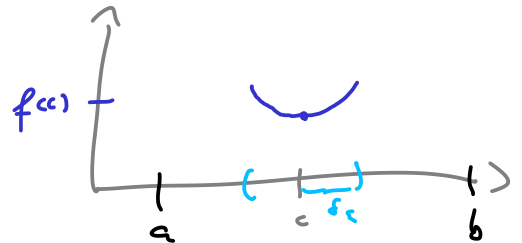
$$\Rightarrow f'(x) > 0 \cdot (x - c) = 0$$

(*)

$\Rightarrow$ f ist auf $[c, c + \delta_\varepsilon]$ streng monoton wachsend

$$\text{Also: } f(c) \leq f(x) \quad \forall x \in [c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon]$$

$\Rightarrow$ f hat in c ein lokales Minimum.



(a) analog.

(b)

Bsp. 18.15:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \stackrel{!}{=} 0$$

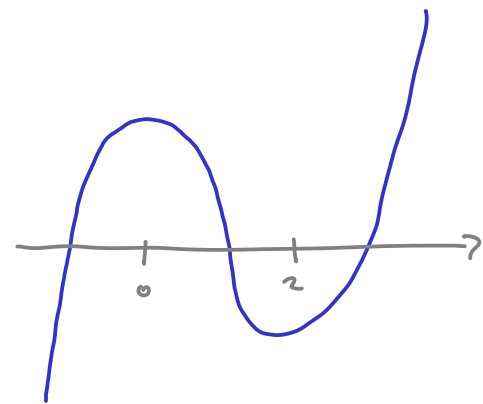
$$3 \cdot (x - 2) \cdot x$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 2$$

$$\text{Zudem: } f''(x) = 6x - 6$$

$$\Rightarrow f(0) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ hat lok. Maximum in } 0$$

$$f(2) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ " " Minimum in } 2$$



Bem. 18.16

$f'(c) = 0$ und f' hat in c Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ f hat in c eine Extremstelle

C.4) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung

Satz 18.17

Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ punktweise
und $f_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ gleichmäßig, dann ist f stetig diffbar mit $f' = g$.

Beweis:

Behauptung: f_n' stetig $\forall n$ & $f_n' \xrightarrow{g.l.m.} g \xRightarrow{18.6} g$ stetig

Sei $c \in [a, b]$.

Zeige: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c)$

Sei $\varepsilon > 0$.

z.z.: $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b] \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon \quad g: \mathbb{R} : \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < \varepsilon$

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right|$$

Beachte: g ist in c

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b] \text{ mit } |x - c| < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } \underbrace{|g(x) - g(c)|}_{**} < \frac{\varepsilon}{3}$

Beachte: $f_n' \xrightarrow{g.l.m.} g$ glm. auf $[a, b]$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \text{ und } \forall x \in [a, b] : \underbrace{\left| f_n'(x) - g(x) \right|}_{***} < \frac{\varepsilon}{3}$

Sei nun $x \in [a, b] \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon \text{ und } n \geq n_\varepsilon$.

$\xRightarrow{18.7}$ $\exists y$ zwischen x und c mit $\frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = f_n'(y)$ (*)

$$\Rightarrow |y - c| \leq |x - c| < \delta_\varepsilon$$

Damit: $\left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - g(c) \right| \stackrel{(*)}{=} \left| f'_n(y) - g(c) \right| =$

$$= \left| f'_n(y) - g(y) + g(y) - g(c) \right| \leq \underbrace{\left| f'_n(y) - g(y) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\left| g(y) - g(c) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{2\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left| \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - g(c) \right|}_{< \frac{2\varepsilon}{3}} \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Also: f ist diff. bar in c mit $f'(c) = g(c)$
 $\Rightarrow f' = g \Rightarrow f$ ist stetig diff. bar auf $[a, b]$. □

Bem. 18.19:

② 18.17 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n)(c) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'(c)$
 d.h. Ableitung und GW vertauschen

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}$$

d.h. 2 GW vertauschen !!!

⑥ Man kann in 18.17 auf die Stetigkeit der f'_n verzichten!
 (denn ist f' evtl. nicht durch stetig).

⑦ In 18.17 fordert man nur ptw. Konvergenz der f_n ,
 aber man kann zeigen, daß die f_n unter der Voraussetzung
 von 18.17 immer glm. gegen f konvergieren!

C.5) Ableitung von Potenzreihen

Kor. 18.19

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$.

Dann ist $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ diff. bar auf $(-r, r)$

mit $f': (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$.

Beweis:

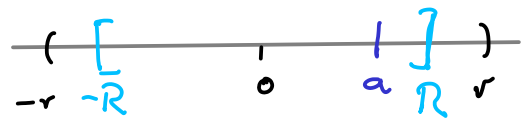
ÜA (12.45) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ & $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ haben beide den KR r
 $\Rightarrow$ 18.7 $g: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ ist stetig auf $(-r, r)$

Sei $a \in (-r, r)$.

z.z. f diff. bar in a mit $f'(a) = g(a)$

Setze $R := \frac{r+|a|}{2} < r$

$\Rightarrow a \in [-R, R]$



$\Rightarrow f_n: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ ist stetig diff. bar auf $[-R, R]$

und $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot x^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(x)$

und $f'_n \rightarrow g$ glw. auf $[-R, R]$

und $f_n \rightarrow f$ glw. auf $[-R, R]$

$\Rightarrow$ 18.7 f ist diff. bar auf $[-R, R]$, also auch in a ,
mit $f'(a) = g(a)$ □

Kor. 18.20:

Ein durch eine Potenzreihe definierte Funkt. ist ∞ oft diff. bar!

C.6) Ableitungen spezieller Funktionen

Kor. 18.21

- a) $\exp$ ist unendlich oft diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit $\exp'(x) = \exp(x)$.
- b) $\sin$ ist unendlich oft diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit $\sin'(x) = \cos(x)$.
- c) $\cos$ ist unendlich oft diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- d) $\exp_a$ ist stetig diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit $\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$.
- e) $\log_a$ ist stetig diff. bar auf $(0, \infty)$ mit $\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$, $1 \neq a \in \mathbb{R}_{>0}$.

Inbesondere: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

- f) $\tan$ ist stetig diff. bar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
- g) $\cot$ ist stetig diff. bar auf $(0, \pi)$ mit $\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.
- h) $\arctan$ ist stetig diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- i) arccot ist stetig diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit $\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
- j) $\arcsin$ ist stetig diff. bar auf $(-1, 1)$ mit $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- k) $\arccos$ ist stetig diff. bar auf $(-1, 1)$ mit $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Bew:

a) 18.19 + 18.20 $\Rightarrow \exp$ ist ∞ oft diff. bar auf $\mathbb{R}$
 mit $\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

b) 18.19 + 18.20 $\Rightarrow \sin$ ist ∞ oft diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{x^{2n+1-1}}{(2n+1)!} \cdot (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

c) 18.19 + 18.20 $\Rightarrow \cos$ ist ∞ oft diff. bar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\cos'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x)$$

d) $\exp_a(x) = \exp(x \cdot \ln(a))$ ist wegen $\ln$ KR diff. bar auf $\mathbb{R}$
 mit $\exp_a'(x) = \exp'(x \cdot \ln(a)) \cdot (x \cdot \ln(a))' = \ln(a) \cdot \exp(x \cdot \ln(a)) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$
 $\lim_{a \rightarrow 1} \exp_a' = \exp'$ ist ebenfalls stetig

⑥ Beweis: $\exp'_a(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 17.14 $\log_a$ ist diff-bar auf $(0, \infty)$ mit

$$\log'_a(x) = \frac{1}{\exp'_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \exp_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

Zudem: $\log'_a$ ist stetig auf $(0, \infty)$

Falls: $a = e \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{\ln(e) \cdot x} = \frac{1}{x}$

⑦ $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist diff-bar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wegen QR mit

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

" $1 + \tan^2(x)$

Zudem: $\tan'$ stetig auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

⑧ Analy für $\cot$!

⑨ Beweis: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ 17.14 $\arctan$ ist diff-bar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\frac{\frac{\sin^2}{\cos^2}(\arctan(x)) + 1}{1}} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Zudem: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan'$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

⑩ analog für arccot !

(j) Beweis: $\sin^{-1}(x) = \cos(x) > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ arcsin ist d. f. s. v. auf $\sin(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (-1, 1)$
17.14

mit $\arcsin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin^{-1}(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Zusatz: arcsin ist offenbar stetig auf $(-1, 1)$

(k) Analog für arccos!

Bem. 17.22:

Man kann mit Zhl. leicht zeigen, daß alle Fkt. in 17.21
oo oft diffbar sind.

Bsp. 17.23

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^a = \exp(a \cdot \ln(x))$.

Zeige: f ist oo oft diffbar auf $(0, \infty)$ mit $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$

Beweis:

KR $\Rightarrow f$ ist diffbar auf $(0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'(a \cdot \ln(x)) \cdot (a \cdot \ln(x))' = \exp(a \cdot \ln(x)) \cdot \frac{a}{x} \\ &= x^a \cdot a \cdot x^{-1} = a \cdot x^{a-1} \end{aligned}$$

Da f' wieder vom selben Typ ist, folgt mit Zhl. daß f
oo oft diffbar ist.

C.7) Die Regeln von de l'Hôpital

Bem. 18.24

Grenzwertsätze

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\cos(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan(x)}{1 + \frac{1}{x}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)}{\sin^2(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2(x)} = \frac{1}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\exp(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

ABER: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \stackrel{?}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \quad ?$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{?}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} x} = \frac{\infty}{\infty} \quad ?$

Satz 18.25 (Regeln von de l'Hôpital)

Seien $a, b \in [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$, sei $c \in (a, b)$

und $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diff. bar.

Zudem sei $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ und $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty]$ existieren.

(a) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

oder

(b) $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Beweis:

Wir zeigen die Aussage nur für den Fall:

$c \in \mathbb{R}$ und

$k := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$

(D.h. Fälle $c \in \{-\infty, \infty\}$ und $k \in \{-\infty, \infty\}$ gehen sich ab.)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

z.z.: $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \underset{\neq c}{x} \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$

$$\text{Vor.} \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow c} k$$

$$\Rightarrow \exists \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}' > 0 : \forall z \in (a, b) \text{ mit } 0 < |z - c| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}' \text{ gilt: } \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Dann } c \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}', c + \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}')$$

$$\stackrel{\text{M.W.}}{\Rightarrow} \exists z \text{ zwischen } x \text{ \& } y \text{ mit } f'(z) \cdot (g(x) - g(y)) = g'(z) \cdot (f(x) - f(y))$$

Anw.

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad \text{und} \quad z \in (a, b) \cap (c - \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}', c + \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}')$$

Ag: "0" $\Rightarrow$ $\exists a$ zwischen x \& y mit $g'(a) = 0$

$$\text{Zu (a):} \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\text{1. Fall: } c \in (a, b) \xRightarrow{f, g \text{ stetig in } c} f(c) = 0 = g(c)$$

$$\text{2. Fall: } c \notin (a, b) \Rightarrow c \in \{a, b\} \Rightarrow f \text{ \& } g \text{ in } c \text{ stetig fortsetzbar, da } f(c) = g(c) = 0$$

$$\text{Also: o.F. } f \text{ \& } g \text{ in } c \text{ stetig mit } f(c) = g(c) = 0!$$

$$\text{Setz: } \delta_{\varepsilon} := \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}^2 > 0 \text{ und } c \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta_{\varepsilon}, c + \delta_{\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k \right| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| = \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{Also: } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

Zu (b): Sei $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$.

1. Fall: $f \equiv 0$ in einer kleinen Umgebung von $c \Rightarrow f' \equiv 0$ nahe bei c

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{0}{\pm \infty} = 0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

2. Fall: $f \not\equiv 0$ in der Nähe von c (und $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty$)

$$\Rightarrow \exists y \in (a, b) \cap (c - \delta_{\frac{\epsilon}{2}}, c + \delta_{\frac{\epsilon}{2}}) : f(y) \neq 0 \neq g(y)$$

Auswahl: $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x)} - l \right| =$

$$= \left| \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} - l \right|$$

$$= \left| \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} - l \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{f(y)}{g(x)} \right|}_{< \frac{\epsilon}{4}} + \underbrace{\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right|}_{\leq 5} \cdot \underbrace{\left| \frac{g(y)}{g(x)} \right|}_{< \frac{\epsilon}{4 \cdot 5}} + \underbrace{\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l \right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad (***)$$

① $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = 0$

$$\Rightarrow \exists \delta_{\frac{\epsilon}{4}} > 0 : \forall x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_{\frac{\epsilon}{4}} \text{ gilt } \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{\epsilon}{4 \cdot |f(y)|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(y)}{g(x)} \right| < \frac{\epsilon}{4}$$

② Für $0 \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta_{\frac{\epsilon}{2}}, c + \delta_{\frac{\epsilon}{2}})$ gilt:

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l + l \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - l \right| + |l| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - l \right| + |l| < \frac{\epsilon}{2} + |l|$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta_\xi''' > 0 : \forall x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\xi''' \text{ gilt, } \left| \frac{1}{g(x)} \right| < \frac{\xi}{4 \cdot 5 \cdot |g(y)|}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{g(y)}{g(x)} \right| < \frac{\xi}{4 \cdot 5}$$

$$\textcircled{4} \text{ Für } c \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta_\xi', c + \delta_\xi') \text{ gilt,}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - h \right| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - h \right| < \frac{\xi}{2}$$

$$\text{Satz: } \delta_\xi := \min \left\{ \delta_{\frac{\xi}{2}}', \delta_\xi'', \delta_\xi''', |g - c| \right\} > 0$$

$$\text{Für } x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - c| < \delta_\xi.$$

$$\text{Dann: } \left| \frac{f(x)}{g(x)} - h \right| < \xi \text{ und } \textcircled{***}$$

$$\text{Also: } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = h$$

[5]

Bem. 18.26: (Vgl. wir in 18.25)

$$g' \text{ stetig} \Rightarrow g' \text{ stets positiv oder stets negativ}$$

$$\Rightarrow g \text{ ist streng monoton}$$

Bsp. 18.27:

$$\textcircled{a} (a, b) = (0, \infty), \quad c = 0, \quad f = \sin, \quad g = \sqrt{\cdot} \quad \text{diffbar & } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0 \quad \forall x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin'(x)}{\sqrt{x}'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = \cos(0) \cdot 2 \cdot \sqrt{0} = 0$$

⑥ $(a, b) = (0, \infty)$, $c = \infty$, $f = \ln$, $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}_{>0}$
 $f \geq g$ diffbar, $g'(x) = a \cdot x^{a-1} \neq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln'(x)}{(x^a)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{a \cdot x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{a \cdot x^a}_{\rightarrow \infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

C.8) Wachstum der Exponentialfunktion

Korollar 19.28

Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$ ein Polynom über $\mathbb{R}$.

Dann gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0$.

D.h. die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Polynomfunktion.

Beweis:

Behauptung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x)$ ist diffbar mit $f'(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$
d.h. f' ist auch ein Polynomfkt. mit $\deg(f') = \deg(f) - 1$.

Zuge mit Ind. nach n : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0$

$$\underline{n=0}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0}{\exp(x)} \underset{\text{GWS}}{=} \frac{a_0}{\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x)} = \frac{a_0}{\infty} = 0$$

$$\underline{n-1 \mapsto n}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} \underset{\text{K.28}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\exp'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\exp(x)} \underset{\text{I.H.}}{=} 0$$

C.9) Der Satz von Taylor

Def. 18.29

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U \subseteq \mathbb{R}$.

① Ist f n -fach diff. bar in a , dann heißt $T_{f,a}^n := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$ das n -te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a .

② Ist f ∞ -fach diff. bar in a , dann heißt $T_{f,a} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt a oder die Taylor-Entwicklung von f in a .

Beachte: $T_{f,a}^n(a) = T_{f,a}(a) = f(a)$.

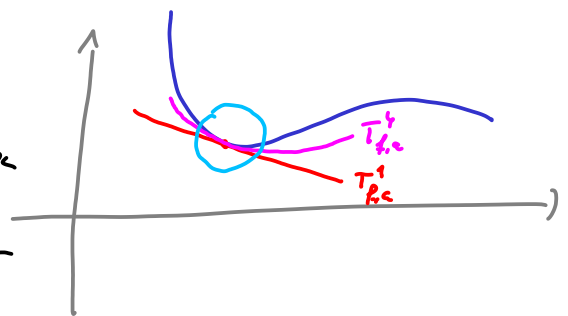
Bem. 18.30

$$T_{f,a}^1(x) = \sum_{k=0}^1 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) \stackrel{!}{=} g$$

optimale lineare
Approximation an
 f in $(a, f(a))$

Gleichung der Tangente an den
Graphen von f in $(a, f(a))$

Zus. $T_{f,a}^n(x)$ ist eine Approximation
von $f(x)$ durch ein Polynom
vom Grad n



Hoffnung: $T_{f,a}^n(x)$ approximiert $f(x)$ nahe bei a besser als $T_{f,a}^1$
 $\cdot T_{f,a}^n(x)$ approximiert $f(x)$ optimal, d.h. $T_{f,a}^n(x) = f(x)$

Bsp. 18.31

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit $k\mathbb{R} \ r > 0$.

$\Rightarrow f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ ist ∞ oft diffbar

mit $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

$$\Rightarrow T_{f,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \Rightarrow T_{f,0}(x) = f(x) \quad \forall x \in (-r, r)$$

Zudem: $(T_{f,0}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf $(-r, r)$ punktweise gegen f
und auf $[-R, R] \subset (-r, r)$ sogar gleichm.!

Bsp. 18.32

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$$

Beh: f ist ∞ oft diffbar in $a = 0$

mit $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: üA.

$$\underline{\text{A1.3.1}} \quad T_{f,0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{=0}{f^{(n)}(0)}}{n!} \cdot t^n = 0 \quad \text{hat } k\mathbb{R} \infty$$

$$\Rightarrow \forall 0 \neq x \in \mathbb{R} : T_{f,0}(x) = 0 \neq \exp(-\frac{1}{x^2}) = f(x)$$

Satz von Taylor 18.33

Sei I ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei $n+1$ -fach diffbar und $x, a \in I$.

Dann gibt es ein c zwischen a und x , so dass

$$f(x) - T_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Restglied des n -ten Taylorpolynoms

Beweis: O.E: $x > a$.

Definition: $z := \frac{(f(x) - T_{f,a}^n(x)) \cdot (n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \in \mathbb{R}$

und $g: [a, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g(y) &:= f(x) - T_{f,y}^n(x) - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \\ &= f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \end{aligned}$$

Vor $\Rightarrow f$ ist $(n+1)$ -fach diffbar auf I , also auch auf $[a, x]$

$\Rightarrow g$ ist diffbar auf $[a, x]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - k \cdot \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^{k-1} \right) + \frac{z \cdot (n+1)}{(n+1)!} \cdot (x-y)^n \\ &= -f'(y) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} \cdot (x-y)^{k-1} \right) + \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n \\ &= -\cancel{f'(y)} + \cancel{f'(y)} - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n + \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n \\ &= \frac{z}{n!} (x-y)^n - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n = \frac{z - f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n \end{aligned}$$

Zu zeigen: $g(x) = \underbrace{f(x) - f(x)}_{=0} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot \underbrace{(x-x)^k}_0 - \frac{z}{(n+1)!} \cdot \underbrace{(x-x)^{n+1}}_0 = 0$

$$g(a) = f(x) - T_{f,a}^n(x) - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ Rollen $\exists c \in (a, x) : 0 = g'(c) = \frac{z - f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot \underbrace{(x-c)^n}_{\neq 0}$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(c) = z \Rightarrow f(x) - T_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$ □

Bsp. 19.34:

$$f = \exp, \quad a = 0, \quad x = 1$$

$$\Rightarrow T_{\exp, 0}^n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} \cdot (1-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, 1) : \left| \exp(x) - T_{\exp, 0}^n(x) \right| = \left| \frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} \right|$$
$$= \left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right|$$

$\exp(c) \leq \exp(1) = e$
 $\frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$

$$n=6: \quad \left| e - \frac{1957}{720} \right| < \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} < \frac{1}{1000} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

d.h. e & $\frac{1957}{720}$ stimmen bis zur 3. Nachkommastelle überein

$$\text{d.h. } e = 2,718 \dots$$

Bsp. 18.35:

$l_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist ∞ oft diffbar mit $l_n'(x) = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow l_n^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$$

$$\Rightarrow T_{l_n, 1}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{l_n^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

Sei $x \in (1, 2]$

$$\xrightarrow[\text{18.33}]{\text{Taylor}} \exists c \in (1, x) \subseteq (1, 2] : \left| l_n(x) - T_{l_n, 1}^n(x) \right| = \left| \frac{l_n^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-1)^{n+1} \right|$$

$$0 < \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{c^{n+1}} \cdot \underbrace{|x-1|^{n+1}}_{\leq 1}$$

≤ 1 ≤ 1

$$\Rightarrow T_{l_n, 1}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_n \text{ glm. auf } [1, 2]$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$T_{l_n, 1} \text{ glm. auf } [1, 2]$$

$$\Rightarrow l_n(x) = T_{l_n, 1}^n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

für alle $x \in [1, 2]$

Später: $\ln(x) = T_{\ln,1}(x) \quad \forall x \in (0, 2]$

Konkret: $\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(2-1)^k}{k} = 1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k} = -\ln(2)$

(2)

C.10) Allgemeine Bedingung für Extremstellen

Satz 18.36

Sei $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ -fach stetig diffbar, $c \in (a,b)$ und $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$ sowie $f^{(n+1)}(c) \neq 0$.

(a) n gerade $\Rightarrow f$ hat in c kein Extremum.

(b) n ungerade $\wedge f^{(n+1)}(c) < 0 \Rightarrow f$ hat in c ein lokales Maximum.

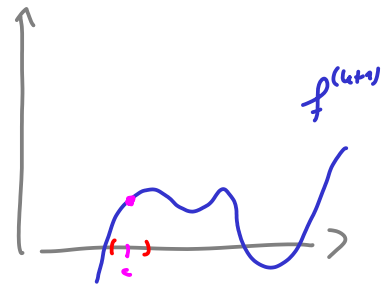
(c) n ungerade $\wedge f^{(n+1)}(c) > 0 \Rightarrow f$ hat in c ein lokales Minimum.

Beweis: o.E. $f^{(n+1)}(c) > 0$

Var. $\Rightarrow f^{(n+1)}$ stetig und $f^{(n+1)}(c) > 0$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) : f^{(n+1)}(x) > 0$

Vst. $\Rightarrow T_{f,c}^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \cdot (t-c)^k = f(c)$



Sei $c \neq x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$

Taylor
18.33

$\exists d_x$ zwischen x und c : $f(x) - T_{f,c}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(d_x)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$

$\parallel$
 $f(x) - f(c)$

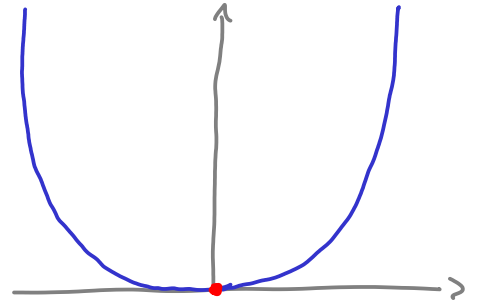
1. Fall: n gerade $\Rightarrow n+1$ ungerade $\Rightarrow (x-c)^{n+1}$ hat in c einen Vorzeichenwechsel $\Rightarrow f(x) - f(c) \begin{cases} < 0, & x \in (c-\varepsilon, c) \\ > 0, & x \in (c, c+\varepsilon) \end{cases}$
 $\Rightarrow f$ hat in c keine Extremstelle

2. Fall: n ungerade $\Rightarrow n+2$ gerade $\Rightarrow (x-c)^{n+2} > 0 \ \forall x \neq c$
 $\Rightarrow f(x) > f(c) \ \forall x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow f$ hat in c ein lokales Minimum.

Bsp. 18.37:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^4$$

hat in $c=0$ ein globales Minimum



Beweis: $f'(0) = 4 \cdot 0^3 = 0$

$$f''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0$$

$$f'''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$f^{(4)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 0$$

$\Rightarrow$ 18.36 f hat in 0 ein lokales Minimum!

Bemerkung 18.38:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 18.31 f ist ∞ oft diffbar mit $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \geq 0$

Abb.: f hat in $c=0$ ein globales Minimum, weil $f(x) > 0 \ \forall x \neq 0$

! 18.36 ist hier nicht anwendbar!

§ 19 Das Riemann-Integral

A) Obersummen und Untersummen

Def. 19.1 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

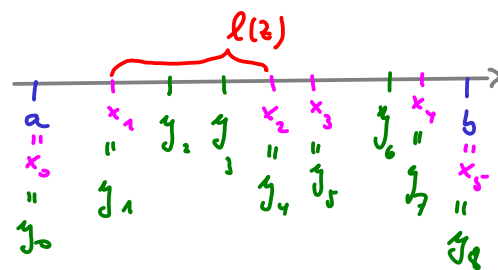
① $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ heißt **Zerlegung** von $[a, b]$: $\Leftrightarrow a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

• $l(Z) := \max \{x_i - x_{i-1} \mid i=1, \dots, n\}$ = **Länge** von Z

• $\text{supp}(Z) := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ = **Träger** von Z

• $|Z| := n$ = **Mächtigkeit** von Z

• $x_0, \dots, x_n$ heißen die **Stützpunkte** von Z



② Seien $Z = (x_0, \dots, x_n)$ und $Z' = (y_0, \dots, y_m)$ Zerlegungen von $[a, b]$.

Dann heißt Z' **Verfeinerung** von Z : $\Leftrightarrow \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq \{y_0, \dots, y_m\}$.

③ Seien Z und Z' zwei Zerlegungen.

Dann: $Z * Z' = (z_0, \dots, z_k)$, mit $\text{supp}(Z) \cup \text{supp}(Z') = \{z_0, \dots, z_k\}$ und $z_0 < \dots < z_k$,
heißt **gemeinsame Verfeinerung** von Z und Z' .

Bsp. 19.2

$Z = (0, 1, 3, 5)$ > Zerlegungen von $[0, 5]$

$Z' = (0, 2, 5)$

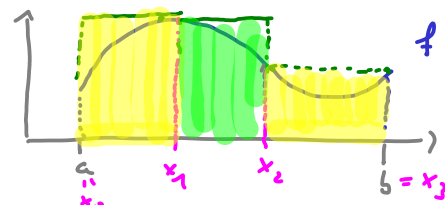
$\Rightarrow Z * Z' = (0, 1, 2, 3, 5)$ ist Verfeinerung von Z und Z'



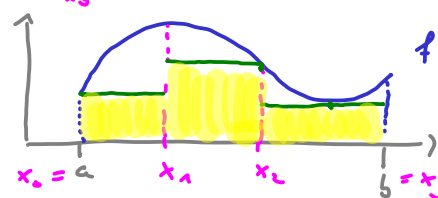
Def. 19.3

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt**, $a < b$, $Z = (x_0, \dots, x_n)$ Zerlegung von $[a, b]$

• $OS(f, Z) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
= **Obersumme** von f bzgl. Z



• $US(f, Z) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
= **Untersumme** von f bzgl. Z

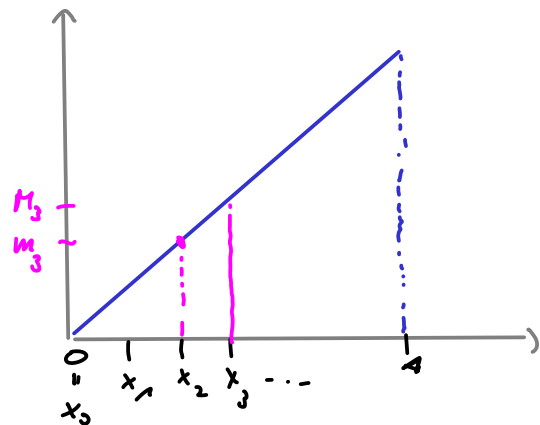


Bsp. 19.4:

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}: x \longmapsto x$$

$$Z^n = (x_0, \dots, x_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\right)$$

= äquidistante Zerlegung von $[0, 1]$



$$\Rightarrow [x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

$$\Rightarrow m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = \frac{i-1}{n}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = \frac{i}{n}$$

$$\Rightarrow US(f, Z^n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \frac{i-1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$OS(f, Z^n) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{1}{n}} \cdot M_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)$$

//

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Lemma 19.5

Sei $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], a < b$.

(a) Z' Verfeinerung von Z

$$\Rightarrow 0 \leq US(f, Z') - US(f, Z) \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot (|Z'| - |Z|)$$

$$0 \leq OS(f, Z) - OS(f, Z') \leq 2 \cdot M \cdot \ell(Z) \cdot (|Z'| - |Z|)$$

$$\text{folgt: } US(f, Z) \leq US(f, Z') \leq OS(f, Z') \leq OS(f, Z)$$

(b) Seien Z & Z' sind zwei Zerlegungen von $[a, b]$

$$\Rightarrow US(f, Z) \leq OS(f, Z')$$

$$(c) \underline{Zukun}: -M \cdot (b-a) \leq US(f, Z) \leq OS(f, Z) \leq M \cdot (b-a)$$

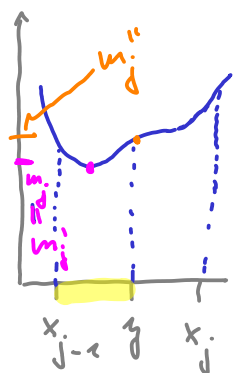
Beweis:

(a) Sei $z = (x_0, \dots, x_n)$ und $m_i := \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Finden wir $z' = (x_0, \dots, x_{j-1}, y, x_j, \dots, x_n)$.

Setze: $m_j' := \inf \{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, y]\} \geq m_j$

$m_j'' := \inf \{f(x) \mid x \in [y, x_j]\} \geq m_j$



$$\Rightarrow \mathcal{U}_S(f, z) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (x_j - x_{j-1}) \cdot m_j$$

$$= \sum_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (x_j - y) \cdot m_j + (y - x_{j-1}) \cdot m_j$$

$$\leq \sum_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (x_j - y) \cdot m_j' + (y - x_{j-1}) \cdot m_j''$$

$$= \mathcal{U}_S(f, z')$$

$$\Rightarrow 0 \leq \mathcal{U}_S(f, z') - \mathcal{U}_S(f, z)$$

$$= (x_j - y) \cdot (m_j' - m_j) + (y - x_{j-1}) \cdot (m_j'' - m_j)$$

$$\leq (x_j - y) \cdot (M + m) + (y - x_{j-1}) \cdot (M + m)$$

$$= 2 \cdot M \cdot \underbrace{(x_j - x_{j-1})}_{\leq l(z)} \leq 2 \cdot M \cdot l(z) \cdot \underbrace{(|z'| - |z|)}_{=1}$$

Wenn $|z'| - |z| > 1$, dann mehr Zerteilungen mit dem Fall wie oben!

Für Obersummen geht das analog!

⑥ Sind z & z' zwei zufällige von $[a, b]$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_S(f, z) \stackrel{(a)}{\leq} \mathcal{U}_S(f, z * z') \stackrel{\substack{\text{Def. 1} \\ (b)}}{\leq} \mathcal{O}_S(f, z * z') \leq \mathcal{O}_S(f, z')$$

(c) $z' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $z = (x_0, \dots, x_n)$ beliebige Zerlegung von [c,d]
 $\quad \quad \quad y_0 \quad y_1$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{U_S(f, z)}_{(a)} \leq U_S(f, z) \leq O_S(f, z) \leq \underbrace{O_S(f, z')}_{//}$$
$$(b-a) \cdot \inf\{f(x) | x \in [a,b]\} \quad (b-a) \cdot \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$$
$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \uparrow$$
$$-(b-a) \cdot M = (b-a) \cdot (-M) \quad (b-a) \cdot M$$

5

Bsp. 19.6:

f und z^h in 19.4

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_S(f, z^n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} = \mathcal{O}_S(f, z^n)$$

B) Riemann-integrierbare Funktionen

Def. 19.7:

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$.

- $OI(f) := \inf \{ OS(f, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$
 $=$ Oberintegral von f

- $UI(f) := \sup \{ US(f, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ Zerlegung von } [a, b] \}$
 $=$ Unterrintegral von f

$$\therefore 8.19 \Rightarrow UI(f) \leq OI(f)$$

• f heißt **Riemann-integrierbar** auf $[a, b]$; $\Leftrightarrow$ $UI(f) = OI(f)$
 Dann heißt zudem $\int_a^b f(x) dx := OI(f)$ das **Integral** von f auf $[a, b]$.

Bsp. 19.8:

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \quad \text{und} \quad Z^n = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = US(f, Z^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z^n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \leq UI(f) \leq OI(f) \leq \frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$

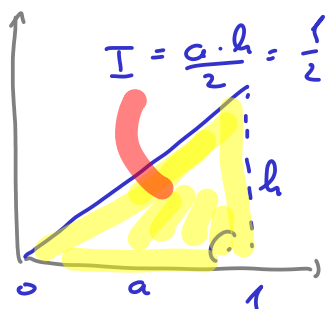
$\Downarrow$

$$UI(f) = OI(f) = \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

f ist Riemann-int. auf $[0, 1]$

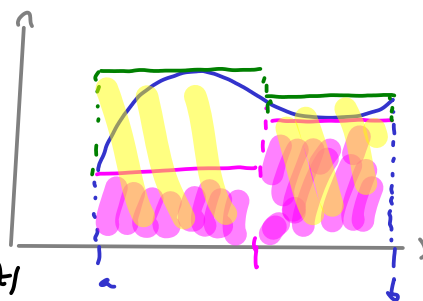
$$\text{mit} \quad \int_0^1 x \, dx = OI(f) = \frac{1}{2}$$



Bem. 19.9:

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0 \, \forall x$ und beschränkt!

Sei $I :=$ Flächeninhalt, den Graph von f mit x -Achse einschließt



$$\Rightarrow \forall Z : US(f, Z) \leq I \leq OS(f, Z)$$

$\Downarrow$

$$UI(f) \leq I \leq OI(f)$$

$\Downarrow f$ R-int.

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

Bsp. 19.10i

② $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto c$

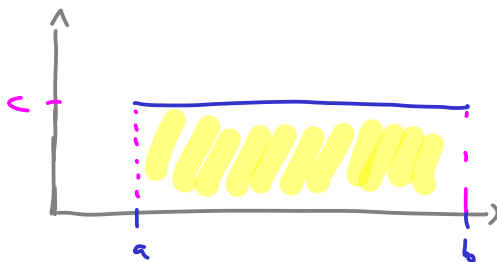
$\Rightarrow Z = (x_0, \dots, x_n)$ Zerlegung von $[a, b]$

$\leadsto OS(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c = c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b - a)$

$US(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c$

$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = c \cdot (b - a)$

$\Rightarrow f$ ist R-int. mit $\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$



⑥ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
ist beschränkt

Dirichlet'sche
Sprungfunktion

Sei $Z = (x_0, \dots, x_n)$ Zerlegung von $[0, 1]$.

$\Rightarrow US(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{=0} = 0$

$[x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$OS(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{=1} = (x_n - x_0) \stackrel{1}{=} 1$

$[x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow UI(f) = 0 \neq 1 = OI(f)$

$\Rightarrow f$ ist nicht Riemann-integrierbar!

C) Das Riemannsche Integrabilitätskriterium

Satz 19.11 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$.

Dann: f ist **integrierbar** auf $[a, b]$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \xi = \xi(\varepsilon) \text{ Zerlegung von } [a, b] : OS(f, \xi) - US(f, \xi) < \varepsilon$$

Beweis:

" $\Rightarrow$ " Sei $\varepsilon > 0$.

$$\bullet \quad OI(f) = \inf \underbrace{\{ OS(f, \xi) \mid \xi = \xi_{\text{Zerl. von } [a, b]} \}}_{=: A}$$

$\Rightarrow OI(f)$ ist die größte untere Schranke von A

$\Rightarrow OI(f) + \frac{\varepsilon}{2}$ ist keine untere Schranke von A

$$\Rightarrow \exists \xi' = \xi'_{\text{Zerl. von } [a, b]} : OS(f, \xi') < OI(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bullet \quad UI(f) = \sup \underbrace{\{ US(f, \xi) \mid \xi = \xi_{\text{Zerl. von } [a, b]} \}}_{=: B}$$

$\Rightarrow UI(f)$ ist die kleinste obere Schranke von B

$\Rightarrow UI(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ ist keine obere Schranke von B

$$\Rightarrow \exists \xi'' = \xi''_{\text{Zerl. von } [a, b]} : US(f, \xi'') > UI(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bullet \quad \text{Setze: } \xi := \xi' * \xi''$$

$$\Rightarrow OS(f, \xi) - US(f, \xi) \leq OS(f, \xi') - US(f, \xi'')$$

$$< \underbrace{\left(OI(f) + \frac{\varepsilon}{2} \right)}_{\substack{f \text{ integrierbar} \\ \Rightarrow OI(f)}} - \underbrace{\left(UI(f) - \frac{\varepsilon}{2} \right)}_{UI(f)} = \varepsilon$$

$$"\Leftarrow" \text{ Satz 19.12: } \varepsilon := \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow \exists \xi^n = \xi^n_{\text{Zerl. von } [a, b]} : OS(f, \xi^n) - US(f, \xi^n) < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow n \rightarrow \infty} > OS(f, \xi^n) - US(f, \xi^n) \geq \underbrace{OI(f) - UI(f)}_{\substack{\downarrow n \rightarrow \infty \\ 0}} \geq 0 \quad \Downarrow \quad OI(f) = UI(f)$$

Lemma 19.12

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b]$, $a < b$.

Dann: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall z = \text{Zerl. von } [a, b] \text{ mit } l(z) < \delta_\varepsilon \text{ gilt: } Os(f, z) - Us(f, z) < \varepsilon$

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

RJK 19.11 $\Rightarrow \exists z' = \text{Zerl. von } [a, b] : Os(f, z') - Us(f, z') < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

Setze: $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{8 \cdot |z'| \cdot M} > 0$, wobei $M := \sup \{ |f(x)| \mid x \in [a, b] \}$

Sei z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $l(z) < \delta_\varepsilon$.

$$\Rightarrow Os(f, z) - Us(f, z) = \underbrace{Os(f, z) - Os(f, z * z')}_{\textcircled{1} < \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{Os(f, z * z') - Us(f, z * z')}_{\textcircled{2} < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{Us(f, z * z') - Us(f, z)}_{\textcircled{3} < \frac{\varepsilon}{4}} < \varepsilon$$

$$\text{zu } \textcircled{2}: Os(f, z * z') - Us(f, z * z') \leq Os(f, z') - Us(f, z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{zu } \textcircled{1}: Os(f, z) - Os(f, z * z') \stackrel{19.5}{\leq} 2 \cdot M \cdot \underbrace{l(z)}_{< \delta_\varepsilon} \cdot \underbrace{(|z * z'| - |z|)}_{\leq |z'|} < 2 \cdot M \cdot |z'| \cdot \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\text{zu } \textcircled{3}: Us(f, z * z') - Us(f, z) \stackrel{19.5}{\leq} 2 \cdot M \cdot \underbrace{l(z)}_{< \delta_\varepsilon} \cdot \underbrace{(|z * z'| - |z|)}_{\leq |z'|} < 2 \cdot M \cdot |z'| \cdot \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$$

□

D) Zwei Klassen integrierbarer Funktionen

Satz 19.13

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ integrierbar auf $[a, b]$

Beweis:

Beachte: f stetig auf $[a, b] \stackrel{19.15}{\Rightarrow} f$ ist beschränkt

$\stackrel{19.26}{\hookrightarrow} f$ ist glw. stetig auf $[a, b]$ (*)

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$(*) \Rightarrow \exists \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}} > 0 : \forall x, y \in [a, b] \text{ mit } |x-y| < \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}} \text{ gilt: } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (**)$$

Wähle eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a, b]$ mit $l(\mathcal{Z}) < \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}}$
 $(x_0, \dots, x_n)$

Vor. $\Rightarrow f$ ist stetig auf $[x_{i-1}, x_i]$

$$\Rightarrow \exists y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i] : f(y_i) = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\text{und } f(z_i) = \inf \{ |f(x)| \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$\Rightarrow |y_i - z_i| \leq |x_i - x_{i-1}| \leq l(\mathcal{Z}) < \delta_{\frac{\varepsilon}{b-a}} \Rightarrow 0 \leq f(y_i) - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (**)$$

$$\Rightarrow OS(f, \mathcal{Z}) - US(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \underbrace{(f(y_i) - f(z_i))}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$< \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_n - x_0) = \varepsilon$$

Damit: f integrierbar wegen 19.11. (RJK).

b)

Bsp. 19.14:

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in 0.

Satz: $\mathcal{Z}^n := (0, \frac{1}{n}, 1)$ ist eine Zerlegung von $[0, 1]$, $n \geq 1$.

$$\Rightarrow US(f, \mathcal{Z}^n) = (\frac{1}{n} - 0) \cdot 0 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 1 = 1 - \frac{1}{n}$$

$$OS(f, \mathcal{Z}^n) = (\frac{1}{n} - 0) \cdot 1 + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} = US(f, \mathcal{Z}^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, \mathcal{Z}^n) = 1$$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty}$$

$\Rightarrow$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty}$$

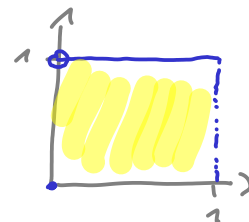
$$\downarrow_{n \rightarrow \infty}$$

$\Leftarrow$

$$\downarrow_{n \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = 1$$

$$\Rightarrow f \text{ ist integrierbar auf } [0, 1] \text{ mit } \int_0^1 f(x) dx = 1$$



Satz 19.15

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf $[a, b]$

Beweis o.E. f ist monoton wachsend

$\Rightarrow \forall x \in [a, b]: f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow f$ ist beschränkt

1. Fall: f konstant $\Rightarrow f$ ist integrierbar

2. Fall: f nicht konstant $\Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow f(b) - f(a) > 0$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$\Rightarrow \exists n \geq 1: \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))}$ (*)

Satz: $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \dots, n$

$$\Rightarrow OS(f, Z) - US(f, Z) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= \frac{b-a}{n}} \cdot \left(\underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{= f(x_i)} - \underbrace{\inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}}_{= f(x_{i-1})} \right)$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n} \cdot \left(\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (b-a) \cdot (f(b) - f(a)) < \frac{\varepsilon}{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))} \cdot (b-a) \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

(*)

$\Rightarrow f$ ist integrierbar auf $[a, b]$

19.11
RJK

13

Bsp. 19.16

19.14 $\Rightarrow f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$ ist monoton,
also integrierbar nach 19.15

Achtung: 19.15 liefert nicht den Wert von $\int f(x) dx$!!!

E) Riemannsche Zwischensummen

Def. 19.17

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$, $z = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$.

Gilt für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ stets $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dann heißt

$zS(f, z, \alpha) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)$ die Riemannsche Zwischensumme von f bez. der Zerlegung z und den Zwischenpunkten α .

Lemma 19.18

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$, $z = \text{Zerl. von } [a, b]$ und $\varepsilon > 0$.

① $\exists \alpha$ ZWP von z , so dass $0 \leq OS(f, z) - zS(f, z, \alpha) < \varepsilon$

② $\exists \beta$ ZWP von z , so dass $0 \leq zS(f, z, \beta) - US(f, z) < \varepsilon$

Beweis:

① Sei $z = (x_0, \dots, x_n)$.

$$\text{Setze: } M_i := \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$\Rightarrow M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$ ist eine obere Schranke für $\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}$

$$\Rightarrow \exists \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i] : f(\alpha_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow M_i - f(\alpha_i) < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (*)$$

Setze: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\Rightarrow OS(f, z) - zS(f, z, \alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \overbrace{(M_i - f(\alpha_i))}^{< \frac{\varepsilon}{b-a}}$$

$$\stackrel{(*)}{<} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \underbrace{(x_n - x_0)}_{b-a} = \varepsilon$$

② Analog.

□

F) Riemannsches Folgenkriterium für Integrierbarkeit

Satz 19.19

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$ und $I \in \mathbb{R}$.

Dann sind gleichwertig:

① f ist integrierbar auf $[a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = I$

② $\forall (z^n, \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt: $zs(f, z^n, \alpha^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$

Beweis:

① $\Rightarrow$ ②: Sei f integrierbar mit $\int_a^b f(x) dx = I$.

Sei zudem $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von $[a, b]$ mit $l(z^n) \rightarrow 0$,

$$\text{so dass: } l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

$$\text{z.z: } \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |zs(f, z^n, \alpha^n) - I| < \varepsilon$$

$$(\text{d.h. } zs(f, z^n, \alpha^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I).$$

Vor. $\Rightarrow f$ integrierbar $\xRightarrow{19.12} \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall z = \text{Zerl. von } [a, b] \text{ mit } l(z) < \delta_\varepsilon$

$$\text{gilt: } Os(f, z) - Us(f, z) < \varepsilon \quad (*)$$

$$\text{Vor.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} l(z^n) = 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : l(z^n) = |l(z^n) - 0| < \delta_\varepsilon$$

$$\text{Setze: } n_\varepsilon := n_{\delta_\varepsilon}. \text{ Sei nun } n \geq n_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow zs(f, z^n, \alpha^n) - I \stackrel{u(f)}{\leq} Os(f, z^n) - I \leq Os(f, z^n) - Us(f, z^n) \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$$

$$\stackrel{u(f)}{\geq} Us(f, z^n) - I \stackrel{u(f)}{\geq} Us(f, z^n) - Os(f, z^n) \stackrel{(*)}{>} -\varepsilon$$

$$\Rightarrow |zs(f, z^n, \alpha^n) - I| < \varepsilon$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Für $n \geq 1$ setze: $z^n = (x_0, \dots, x_n)$ mit $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} l(z^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

Zeige: $\lim_{n \rightarrow \infty} OS(f, z^n) = I$

Sei $\varepsilon > 0$.

z.z.: $\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |OS(f, z^n) - I| < \varepsilon$

zu festem ε gibt es nach 19.19 z^n mit z^n

s.d.: $OS(f, z^n) - zS(f, z^n, \alpha^n) < \frac{\varepsilon}{2}$ *

Vor. $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} zS(f, z^n, \alpha^n) = I$

$\Rightarrow \exists n_{\frac{\varepsilon}{2}} : \forall n \geq n_{\frac{\varepsilon}{2}} : |zS(f, z^n, \alpha^n) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ **

Setze: $n_\varepsilon := n_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Sei $n \geq n_\varepsilon$ gegeben

$$\Rightarrow |OS(f, z^n) - I| \leq \underbrace{|OS(f, z^n) - zS(f, z^n, \alpha^n)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|zS(f, z^n, \alpha^n) - I|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Auslag: $\lim_{n \rightarrow \infty} OS(f, z^n) = I$

Damit: $OS(f, z^n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, z^n)$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow n \rightarrow \infty & \Rightarrow & \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty & \Leftarrow & \downarrow n \rightarrow \infty \\ I & & I & & I & & I \end{array}$$

$$\Rightarrow OI(f) = UI(f) = I \quad \Rightarrow f \text{ integrierbar mit } \int_a^b f(x) dx = I$$

Bsp. 19.20:

$$f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \text{ mit } b > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ integrierbar}$$

Setze: $z^n := (x_0, \dots, x_n)$ mit $x_i := i \cdot \frac{b}{n} =: \alpha_i$

$$\Rightarrow \ell(z^n) = \frac{b}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \underset{19.19}{\mathcal{ES}(f, z^n, \alpha^n)} \xrightarrow{\quad} \int_0^b f(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=\frac{b}{n}} \cdot \underbrace{f(\alpha_i)}_{=f(x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n} \cdot \left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\frac{b^3}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{b^3}{3} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}_{\substack{\downarrow 1 \\ \downarrow 1}} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

G) Rechenregeln für Integrale - Linearität + Monotonie

Kor. 19.21

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $a < b$, und seien $c, d \in \mathbb{R}$.

(a) $c \cdot f + d \cdot g$ ist integrierbar mit $\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g)(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx + d \cdot \int_a^b g(x) dx$.

(b) Wenn $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, dann: $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Beweis:

(a) Beachte: $z = (x_0, \dots, x_n) = z_{\text{v.l.}}$ von $[a, b]$ mit $z_0 = a$

$$\Rightarrow \mathcal{ES}(c \cdot f + d \cdot g, z, \alpha) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (c \cdot f(\alpha_i) + d \cdot g(\alpha_i))$$

$$\stackrel{(*)}{=} c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) + d \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot g(\alpha_i) = c \cdot \mathcal{ES}(f, z, \alpha) + d \cdot \mathcal{ES}(g, z, \alpha)$$

Sei $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit zUP_n , so dass $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow zS(c \cdot f + d \cdot g, z^n, \alpha^n) \stackrel{(*)}{=} c \cdot \underbrace{zS(f, z^n, \alpha^n)}_{\substack{\text{19.11} \\ \downarrow n \rightarrow \infty \\ \int_a^b f(x) dx}} + d \cdot \underbrace{zS(g, z^n, \alpha^n)}_{\substack{\text{19.11} \\ \downarrow n \rightarrow \infty \\ \int_a^b g(x) dx}}$$

unverändert von $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ $\rightarrow$ $c \cdot \int_a^b f(x) dx + d \cdot \int_a^b g(x) dx$

$\stackrel{19.11}{\Rightarrow} c \cdot f + d \cdot g$ Riemann integrierbar mit $\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g)(x) dx$

(b) Sei $((z^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Zerl. von $[a, b]$ mit zUP_n , d.h. $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leftarrow zS(f, z^n, \alpha^n) \leq zS(g, z^n, \alpha^n) \rightarrow \int_a^b g(x) dx$$

$\underbrace{f(x) \leq g(x) \forall x}_{\text{f. g.}}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Bsp. 19.22:

$$\int_0^b 3x^2 + 5 dx = 3 \cdot \int_0^b x^2 dx + \int_0^b 5 dx = 3 \cdot \frac{b^3}{3} + 5 \cdot b = b^3 + 5b$$

H) Rechenregeln für Integral - Additivität

Bemerkung 19.23

- $z' = (x_0, \dots, x_n)$ Zerleg. von $[a, c]$
 $z'' = (y_0, \dots, y_m)$ " " $[c, b]$ $\Rightarrow z' * z'' = (x_0, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ Zerl. von $[a, b]$
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ZUPe von z'
 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ ZUPe von z'' $\Rightarrow \alpha \cup \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$ ZUPe von $z' * z''$
- Offensichtlich:
 $OS(f, z' * z'') = OS(f, z') + OS(f, z'')$
 $US(f, z' * z'') = US(f, z') + US(f, z'')$
 $IS(f, z' * z'', \alpha \cup \beta) = IS(f, z', \alpha) + IS(f, z'', \beta)$

Prop. 19.24

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$, und $c \in (a, b)$.

Dann: f ist auf $[a, b]$ integrierbar

$(\Leftrightarrow)$ f ist auf $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar

Zudem gilt dann:
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Beweis:

" $\Leftarrow$ " Sei f integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\Rightarrow \exists z' = \text{Zerl. von } [a, c] : OS(f, z') - US(f, z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists z'' = \text{" " } [c, b] : OS(f, z'') - US(f, z'') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow z := z' * z''$ ist Zerl. von $[a, b]$ mit

$$OS(f, z) - US(f, z) = (OS(f, z') + OS(f, z'')) - (US(f, z') + US(f, z''))$$

$$= \underbrace{OS(f, z') - US(f, z')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{OS(f, z'') - US(f, z'')}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

f int.
auf $[a, b]$
19.24

" $\Rightarrow$ " f integrierbar auf $[a, b]$

$\exists \varepsilon > 0$ gegeben.

$\Rightarrow \exists z = z_{\text{w.l. von } [a, b]} : OS(f, z) - US(f, z) < \varepsilon$
19.11 $(x_0, \dots, x_n)$

O.F.: $c = x_j$ Stützpunkt von z (sonst verfeinern mit c)

Satz 2.1: $z' := (x_0, \dots, x_j) = z_{\text{w.l. von } [a, c]}$

$z'' := (x_j, \dots, x_n) = \text{" " } [c, b]$

$$\Rightarrow z = z' * z''$$

$$\Rightarrow \underbrace{OS(f, z') - US(f, z')}_{\approx 0} + \underbrace{OS(f, z'') - US(f, z'')}_{\approx 0}$$

$$= OS(f, z) - US(f, z) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underline{OS(f, z') - US(f, z') < \varepsilon} \quad \text{und} \quad \underline{OS(f, z'') - US(f, z'') < \varepsilon}$$

$\stackrel{19.11}{\Rightarrow} f$ integrierbar auf $[a, c]$ und $[c, b]$.

Zum Beweis des Integralsatzes:

Wähle eine Folge $((z'^n, \alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ von z.w.l. von $[a, c]$ mit $z_{\text{w.l. von } [a, c]}$

und " " $((z''^n, \beta^n))_{n \in \mathbb{N}}$ " " " $[c, b]$ " " ,

$$\text{so dass: } l(z'^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad l(z''^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Satz 2.1: } z^n := z'^n * z''^n \quad \text{und} \quad f^n := \alpha^n \sqcup \beta^n$$

ist z.w.l. von $[a, b]$ mit $z_{\text{w.l. von } [a, b]}$

$$Zu \text{ Lm: } l(z^n) = \max\{l(z'^n), l(z''^n)\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \stackrel{19.23}{=} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Bsp. 19.25

$$0 < a < b \Rightarrow$$

$$\int_0^b x^2 dx = \int_0^a x^2 dx + \int_a^b x^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

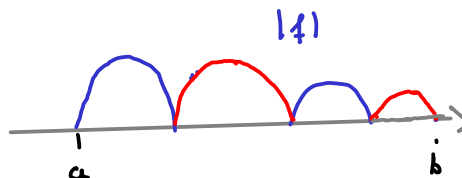
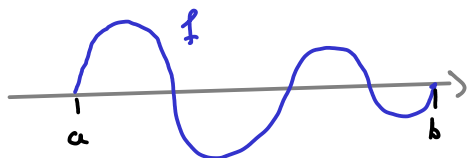
I) Rechenregeln für Integral - Δ-Ungleichung

Prop. 19.26

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $a < b$

Dann: $|f|$ ist integrierbar auf $[a, b]$ mit $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

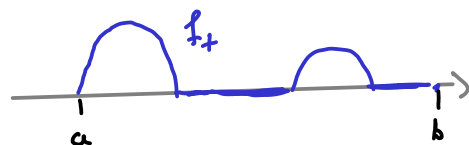
||
"Flächensatz,
den der Graph von
 f mit der x -Achse
einschließt"



Beweis:

Definiere: $f_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow |f| = 2 \cdot f_+ - f$$



Zeige: f_+ ist integrierbar auf $[a, b]$

(dann automatisch $|f| = 2 \cdot f_+ - f$ integrierbar nach 19.24)

Sri 170 gegeben.

Vor. $\Rightarrow f$ injektiv auf $[a, b]$
 $\Rightarrow (x_0, \dots, x_n)$

$$\stackrel{\text{Def. 11.1}}{\Rightarrow} \exists \xi = \xi(x_0, \dots, x_n) \text{ zw. } [a, b] ; \quad |U_\delta(f, \xi) - U(f, \xi)| < \varepsilon$$

$$\underline{2^{urp}}: \quad \forall I \subseteq [a, b] : \quad \sup\{f_+(x) \mid x \in I\} - \inf\{f_+(x) \mid x \in I\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in I\} - \inf\{f(x) \mid x \in I\} \quad \left\{ \textcircled{\otimes} \right.$$

1. F_v : $\forall x \in I: f(x) < 0$

$$\Rightarrow f_1(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \text{linke Seite ist } \textcircled{X} = 0$$

Abb. rechte Seite $\geq 0 \Rightarrow \otimes$

2. Fall: $\forall x \in I: f(x) \geq 0 \rightarrow f_+ = f \text{ auf } I \Rightarrow (*)$

3. f 11: $\exists y, z \in I : f(y) < 0 \leq f(z)$

$$\Rightarrow \sup \{ f_+(x) \mid x \in I \} = \sup \{ f(x) \mid x \in I \} \quad \text{und} \quad \left. \begin{array}{l} \inf \{ f_+(x) \mid x \in I \} = 0 > \inf \{ f(x) \mid x \in I \} \end{array} \right\} \Rightarrow (*)$$

Dumit:

$$Us(f_+, z) - Us(f_-, z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(\exp\{f_+(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \exp\{f_-(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(\sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \right)$$

$$= OS(f, z) - US(f, z) < \Sigma$$

$\Rightarrow f_+$ ist auf $[a, b]$ und in $\mathbb{R}$ sk

Noch zu zeigen: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Beachte: $z = zw_{\text{Lsg}}$ wo $z \in [s, d]$ mit $z \in P_{\text{Lsg}}$ α
 $(x_1, \dots, x_n)$ α

$$\Rightarrow |ZS(f, Z, \alpha)| = \left| \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0} \cdot f(\omega_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot |f(\omega_i)| = ZS(|f|, Z, \alpha)$$

Sei $(z^n, d^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Zwl. von $[a, b]$ mit ZWP, so daß $l(z^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow \left| ZS(f, z^n, d^n) \right| \leq ZS(|f|, z^n, d^n)$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

□

Bem. 19.27:

Additivität $\Rightarrow f$ int. auf $[a, b]$ und $a < c < d < b$
 $\Rightarrow f$ int. auf $[c, d]$

Satz 19.28:

$$\int_a^c f(x) dx := 0$$

$$\int_a^c f(x) dx := - \int_c^a f(x) dx \quad \text{falls } a > b$$

Können darauf verzichten, dass unsere Integralsysteme linear sind!

$\rightarrow$ Linearität + Additivität verallgemeinern soll!

§ 20 Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung + Anwendungen

A) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Def. 20.1

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann: $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f

$\Leftrightarrow F$ ist **differenzierbar** auf I mit $F' = f$.

Prop. 20.2

Seien $F, G: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I Intervall.

Dann: $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in I : F(x) = G(x) + c$

Beweis:

Wähle $a \in I$ fest. Setze: $c := F(a) - G(a)$.

Sei nun $b \in I \setminus \{a\}$, o.E.: $a < b$

z.z.: $F(b) = G(b) + c$

Von $\Rightarrow F - G$ ist diffbar auf $[a, b] \subseteq I$, also auch stetig

$$\text{und } (F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

$\Rightarrow$ $F - G$ ist konstant auf $[a, b]$
16.11

$$\Rightarrow c = F(a) - G(a) = F(b) - G(b) \Rightarrow F(b) = G(b) + c$$

□

Bsp. 20.3:

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ hat die Stammfkt. $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{3}$,

$$\text{da } F'(x) = 3 \cdot \frac{x^{3-1}}{3} = x^2 = f(x) \quad \forall x \in [0, \infty)$$

Berechni 19.20 $\Rightarrow \int_0^y f(x) dx = \int_0^y x^2 dx = \frac{y^3}{3} = F(y)$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$.

Dann ist $F: I \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \int_a^y f(x) dx$ eine Stammfunktion von f .

Beweis: Sei $c \in I$.

Zu zeigen: F ist diff. bar in c mit $F'(c) = f(c)$

$$\text{d.h.} \quad \lim_{y \rightarrow c} \frac{F(y) - F(c)}{y - c} = f(c)$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Z.z.: $\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in I$ mit $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon$ gilt: $\left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| < \varepsilon$

Vor. $\Rightarrow f$ stetig in c

$\Rightarrow \exists \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0 : \forall x \in I$ mit $|x - c| < \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gilt: $|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (*)

Satz: $\delta_\varepsilon := \delta_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$.

Sei $y \in I$ mit $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon = \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

$$\Rightarrow \left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| = \left| \frac{1}{y - c} \cdot \left(\underbrace{\int_a^y f(x) dx}_{= \int_c^y f(x) dx} - \underbrace{\int_a^c f(x) dx}_{= \int_c^c f(x) dx} \right) - f(c) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{y - c} \cdot \int_c^y f(x) dx - \frac{f(c) \cdot (y - c)}{y - c} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y f(x) dx - \int_c^y f(c) dx \right| = \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y (f(x) - f(c)) dx \right|$$

$$\stackrel{19.26}{\leq} \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y \underbrace{|f(x) - f(c)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} dx \right| \stackrel{(*)}{\leq} \left| \frac{1}{y - c} \right| \cdot \left| \int_c^y \frac{\varepsilon}{2} dx \right| \stackrel{= \frac{\varepsilon}{2} \cdot (y - c)}{=} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \square$$

Korollar 20.5 (HDIR)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f .

$$\text{Dann, } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis:

$$20.2 + 20.4 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall y \in [a, b] : F(y) = \int_a^y f(x) dx + c$$

$$\Rightarrow F(a) = \int_a^a f(x) dx + c = 0 + c = c$$

$$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(x) dx + c = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow \text{Beh. 18}$$

Bem. 20.6:

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

(a) HDIR $\Rightarrow$ Differenzieren ist Umkehrung der Integration

(b) Sei F eine Stammfkt. von f , $a, b \in I$.

$$\text{Notation: } F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

(c) $\int f(x) dx$ heißt ein unbestimmtes Integral

und $F := \int f(x) dx$, d.h. $F(y) = \int_a^y f(x) dx$, bezeichnet ein beliebiges Stammfkt. von f .

B) Stammfunktionen durch Ableiten ablesen

Bsp. 20.7 (einige ausgewählte Stammlist.)

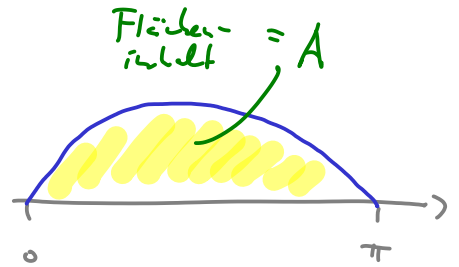
f	$F = \int f(x) dx$
$\exp$	$\exp$
$\exp_a, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \exp_a$
$\cos$	$\sin$
$\sin$	$-\cos$

f	$F = \int f(x) dx$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\ln$
$x \mapsto x^a, a \neq -1$	$x \mapsto \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	$\arctan$
$\frac{1}{\cos^2}$	$\tan$

Bsp. 20.8:

$$A = \int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$

1 + 1 = 2

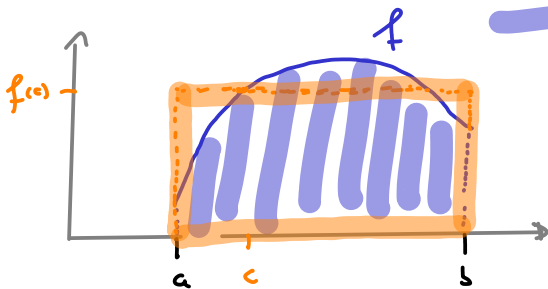


C) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Kovollar 20.9

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a < b$.

$$\text{Dah: } \exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$



Bewies:

zu 2):

HÖLZ $\Rightarrow F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \eta \mapsto \int_a^\eta f(x) dx$ ist Stammfkt von f

$\Rightarrow F$ ist diffbar auf $[a, b]$ mit $F' = f$

$\Rightarrow F$ ist stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b)

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

MDR

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{Def.}}{=} F(b) - \underbrace{F(a)}_0 = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a)$$

13

D) Partielle Integration

Satz 20.11:

Seien $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar.

Dann:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Beweis:

PR $\Rightarrow (u \cdot v)' = u \cdot v' + \underline{u' \cdot v}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx &= \int_a^b (u \cdot v)'(x) dx - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \\ &\stackrel{\text{MDR}}{=} u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx. \end{aligned}$$

13

Bem. 20.12:

Partielle Integration $\hat{=}$ Umkehrung der Produktregel.

Bsp. 20.13

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx &= \int_0^{\pi} \underbrace{\cos(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} dx \stackrel{20.11}{=} u(x) \cdot v(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(x) \cdot v(x) dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\sin(x)) \cdot \sin(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2(x)}_{=1-\cos^2(x)} dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 - \cos^2(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 1 dx - \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx \\ \Rightarrow 2 \cdot \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx &= \cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} 1 dx}_{=x \Big|_0^{\pi}} \Rightarrow \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\pi) \cdot \sin(\pi) + \pi) \end{aligned}$$

E) Der Satz von Taylor

Korollar 20.14 (Restglied in Integralform)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $n+1$ -fach stetig diff'bar, $x, a \in I$.

$$\text{Dann: } f(x) - T_{f,a}^n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n dy.$$

Beweis: Durch Induktion nach n :

$$\underline{n=0:} \quad f(x) - T_{f,a}^0(x) = f(x) - f(a) \stackrel{\text{HJH}}{=} \int_a^x f'(y) dy = \int_a^x \frac{f^{(1)}(y)}{0!} \cdot (x-y)^0 dy \quad \checkmark$$

$n-1 \mapsto n$: Ind.

$$\Rightarrow f(x) - T_{f,a}^{n-1}(x) = \int_a^x \underbrace{\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}}_{=: u(y)} \cdot \underbrace{(x-y)^{n-1}}_{=: v'(y)} dy \stackrel{\text{20.11}}{=} u(y) \cdot v(y) \Big|_a^x - \int_a^x u'(y) \cdot v(y) dy$$

$$= \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n} \Big|_a^x - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n} dy$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n dy$$

$$\Rightarrow f(x) - T_{f,a}^n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n dy$$

13

F) Die Substitutionsregel

Satz 20.15 (Substitutionsregel)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $\varphi([a,b]) \subseteq I$.

$$\text{Dann: } \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx.$$

Beweis:

φ stetig auf $[a, b] \Rightarrow \varphi$ nimmt max & min auf $[a, b]$ an

$$\Rightarrow \exists c, d \in [a, b] : \forall x \in [a, b] : \varphi(c) \leq \varphi(x) \leq \varphi(d)$$

$$\Rightarrow J_\varphi(\varphi) = [\varphi(c), \varphi(d)] \subseteq I$$

$\Rightarrow f$ besitzt auf $J_\varphi(\varphi)$ ein Stammfkt. F

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx = (F \circ \varphi)(x) \Big|_a^b$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx = (F \circ \varphi)(x) \Big|_a^b$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) dz$$

□

Bem. 20.16:

(a) Substitutionsregel $\hat{=}$ Umkehrung der Kettenregel

(b) Ersetzungen:

Substitution "z durch $\varphi(x)$ " oder " $\varphi(x)$ durch z"!

$$\bullet \quad z = \varphi(x) \leadsto \frac{dz}{dx} = \varphi'(x) \leadsto dz = \varphi'(x) \cdot dx$$

$$\leadsto \int f(z) dz = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

Bsp. 20.17

$$\begin{aligned} \int_a^b x \cdot \exp(x^2) dx &= \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z) dz = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\exp(z)}{2} dz \\ &= \frac{\exp(z)}{2} \Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{\exp(b^2) - \exp(a^2)}{2} \end{aligned}$$

$z = \varphi(x) = x^2$
 $dz = 2 \cdot x dx$
 $f(z) = \frac{\exp(z)}{2}$

Bsp. 20.18:

Ziel: bestimme Stammfkt. von $\tan$!

$$\int^y \tan(x) dx = \int^y \underbrace{-\frac{1}{\cos(x)}}_{f(\cos(x))} \cdot \underbrace{(-\sin(x)) dx}_{\varphi'(x) dx} = \int^z f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$$z = \cos(x)$$

$$dz = \varphi'(x) dx = -\sin(x) dx$$

$$f(z) = -\frac{1}{z}$$

$$= \int^{\varphi(y)} f(z) dz = \int^{\cos(y)} -\frac{1}{z} dz = -\ln(z) \Big|_{\cos(y)}$$

$$= -\ln(\cos(y)) \quad \text{für } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bsp. 20.19

Ziel: Bestimme Stammfkt. von $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}; z \mapsto \sqrt{1-z^2}$

$$F(y) = \int^y \sqrt{1-z^2} dz = \int^y f(z) dz = \int^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$$

$$z = \varphi(x) = \sin(x)$$

$$dz = \varphi'(x) dx = \cos(x) dx$$

$$\varphi^{-1}(y) = \arcsin(y)$$

$$= \int^{\arcsin(y)} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(x)}}_{=\cos^2(x)} \cdot \cos(x) dx = \int^{\arcsin(y)} \underbrace{\sqrt{\cos^2(x)}}_{=\cos(x)} \cdot \cos(x) dx$$

$$= \int^{\arcsin(y)} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \cos(x) \cdot \sin(x)) \Big|_{\arcsin(y)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{1-\sin^2(x)} \cdot \sin(x)) \Big|_{\arcsin(y)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\arcsin(y) - \sqrt{1-y^2} \cdot y)$$

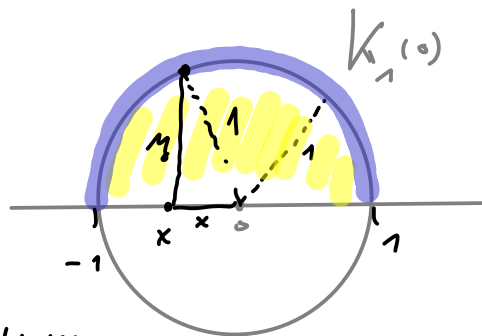
Bsp. 20.20:

Berechne den Flächeninhalt des Kreises $K_1(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

Betrachte: $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx \stackrel{!}{=} \text{Flächeninhalt, den der Graph von } f \text{ mit der } x\text{-Achse einschließt}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{Flächeninhalt von } K_1(0)$$



$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt des Kreises } K_1(0) = 2 \cdot \int_{-1}^1 f(x) dx \stackrel{\text{HADR}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\arcsin(y) + y \cdot \sqrt{1-y^2} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Allgemeiner: $K_r(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \right\} = \text{Kreis von Radius } r > 0$

$$\Rightarrow \text{Flächeninhalt von } K_r(0) = 2 \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \stackrel{\text{SR}}{=} \pi \cdot r^2$$

G) Partialbruchzerlegung

Bem. 20.21

$0 \neq f, g \in \mathbb{R}[t]$ Polynome $\Rightarrow r := \frac{f}{g}$ rationale Funktion

$r = h + \frac{p}{q}$ mit $h, p, q \in \mathbb{R}[t]$ und $\deg(p) < \deg(q)$

$\Rightarrow$
Polynom-
division
 $\Rightarrow$

$$\int r(x) dx = \underbrace{\int h(x) dx}_{\text{leicht}} + \underbrace{\int \frac{p(x)}{q(x)} dx}_{\text{schwer}}$$

Ausgabe: $\frac{p}{q} = \text{Summe von Termen der Form } \frac{A}{(t-a)^k} \text{ und } \frac{B \cdot t + C}{(t^2 + b \cdot t + c)^k}$

wobei $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $4c - b^2 > 0$

$k \in \{1, \dots, n\}$, wenn $n = \text{maximal mit } (t-a)^n \text{ bzw. } (t^2 + b \cdot t + c)^n \text{ teilt } q$

Bsp. 20.22:

(a) Ziel:

$$\int_1^2 \frac{3x^5 + 3x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^3 + x^2} dx = ?$$

Ansatz:

$$(1) \quad f = 3t^5 + 3t^4 + 6t^2 + t - 2, \quad g = t^3 + t^2 = t^2 \cdot (t+1)$$

Polynomdivision

$$(3t^5 + 3t^4 + 6t^2 + t - 2) : (t^3 + t^2) = 3t^2 \text{ Rest } r$$
$$\underline{3t^5 + 3t^4}$$
$$6t^2 + t - 2 =: r$$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = \underbrace{3t^2}_h + \frac{\underbrace{6t^2 + t - 2}_p}{\underbrace{t^3 + t^2}_q} = \frac{p}{q}$$

$$(2) \quad g = t^3 + t^2 = t^2 \cdot (t+1)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1}$$

$$\frac{6t^2 + t - 2}{t^2 \cdot (t+1)}$$

Heupolynom

$$\frac{A \cdot t \cdot (t+1) + B \cdot (t+1) + C \cdot t^2}{t^2 \cdot (t+1)}$$

u

$$\frac{(A+C) \cdot t^2 + (A+B) \cdot t + B}{t^2 \cdot (t+1)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 6 \\ A + B = 1 \\ B = -2 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{LGS}} \begin{array}{l} A = 3 \\ B = -2 \\ C = 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{3}{t} + \frac{-2}{t^2} + \frac{3}{t+1}$$

Damit:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 h(x) dx + \int_1^2 \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

$$= \int_1^2 3x^2 dx + \int_1^2 \frac{3}{x} dx + \int_1^2 \frac{-2}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{3}{x+1} dx$$

$$= x^3 \Big|_1^2 + 3 \cdot \ln(x) \Big|_1^2 + \frac{2}{x} \Big|_1^2 + 3 \cdot \ln(x+1) \Big|_1^2$$

$$= (8 - 1) + (3 \cdot \ln(2) - \underbrace{3 \cdot \ln(1)}_{=0}) + (1 - 2) + (3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(2))$$

$$= 6 + 3 \cdot \ln(3)$$

⑥ Ziel: $\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 \cdot (1+x^2)^2} dx = ?$

Aussetz:

$$\frac{2t^3 + t^2 + 1}{t^2 \cdot (1+t^2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} + \frac{Et+F}{(1+t^2)^2}$$

$$\stackrel{HN}{=} \frac{(A+C) \cdot t^5 + (B+D) \cdot t^4 + (2A+C+E) \cdot t^3 + (2D+D+F) \cdot t^2 + 4 \cdot t + D}{t^2 \cdot (1+t^2)^2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left. \begin{array}{l} A+C = 0 \\ B+D = 0 \\ 2A+C+E = 2 \\ 2B+D+F = 1 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ D = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \\ E = 2 \\ F = 0 \end{array}$$

$f(z) = \frac{1}{z^2}$
 $z = \varphi(x) = 1+x^2$
 $2x dx = \varphi'(x) dx = dz$

Damit:

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 \cdot (1+x^2)^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \Big|_1^2 - \arctan(x) \Big|_1^2 + \int \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{2} \Big|_1^2 + \frac{1}{1+y^2}$$

$$= -\frac{1}{2} - \arctan(y) - \frac{1}{1+y^2}$$

H) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration

Satz 20.23

Seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$, und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ glm. auf $[a, b]$.

Dann ist f stetig auf $[a, b]$ und für $y \in [a, b]$ gilt

$$\int_a^y f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^y f_n(x) dx,$$

d.h. der Grenzwert der Stammfkt. ist eine Stammfkt. der Grenzfkt.

Beweis:

f_n stetig & $f_n \rightarrow f$ glm. $\stackrel{15.6}{\Rightarrow} f$ stetig auf $[a, b]$

$\Rightarrow f_n$ & f integrierbar auf $[a, b] \quad \forall y \in [a, b]$.

Zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^y f_n(x) dx = \int_a^y f(x) dx$

Sei $\varepsilon > 0$.

Z.z.: $\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : \left| \int_a^y f_n(x) dx - \int_a^y f(x) dx \right| < \varepsilon$

Vor. $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ glm. $\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon$ & $\forall x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} \quad (*)$$

Sei nun $n \geq n_\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_a^y f_n(x) dx - \int_a^y f(x) dx \right| &= \left| \int_a^y f_n(x) - f(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^y \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}} dx \leq \int_a^y \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} dx = \frac{\varepsilon \cdot (y-a)}{2 \cdot (b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

(3)

Bem. 20.24:

② Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwert
 $\hat{=}$ Vertauschbarkeit zur Grenzprozesse!

Denn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^y f_n(x) dx \stackrel{D}{=} \int_a^y f(x) dx$$

$\hat{=}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}S(f_n, \tau_m, \alpha^m)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}S(f, \tau_m, \alpha^m)$$

$\hat{=}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}S(f_n, \tau_m, \alpha^m)$$

⑥ Wenn wir 20.23 für die f_n nur integrierbar statt stetig fordern, dann ist f nur noch integrierbar, aber die Formel für die Integrale bleibt richtig!

⑦ Erweiterung zu 18.27:

Vor: $f_n \rightarrow f$ p.k.w., $f_n' \rightarrow g$ g.l.w., f_n stetig diff'bar.

Dann: f diff'bar mit $f' = g$

Beweis (neu):

f_n ist Stammfkt. von f_n'

$$\stackrel{\text{HWR}}{\Rightarrow} f_n(y) - f_n(a) = \int_a^y f_n'(x) dx$$

$$\underset{\nearrow n \rightarrow \infty}{f(y) - f(a)} \stackrel{!}{=} \int_a^y \underset{\nearrow 20.23}{g(x)} dx \stackrel{\text{HWR}}{=} \text{Stammfkt. von } g$$

$$\Rightarrow f \text{ diff'bar ist } g \text{ mit } f'(y) = g(y)$$

I) Integration von Potenzreihen

Kor. 20.25

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ ein Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit $\text{KR } r > 0$.

Dann ist $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ auf jedem Teilintervall

$[a, b] \subseteq (-r, r)$ **integrierbar** und die Funktion

$F: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: y \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot y^{n+1}$ ist ein **Stammfkt.** von f ,

d.h. durch gliedweises Integrieren entsteht eine Stammfkt.

Bew:

• 15.4. $\Rightarrow f_n: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ konv. gln. gegen f
auf $[a, b]$ und f_n ist stetig

$\Rightarrow f$ stetig auf $[a, b] \rightarrow f$ integrierbar auf $[a, b]$

$$\begin{aligned} \cdot \int_0^y f(x) dx &\stackrel{20.23}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^y f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \int_0^y x^k dx \\ &\quad \text{ist st. v. b.} \\ &\quad \text{von } f \text{ (in } y) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big|_0^y$$

$$\begin{aligned} &\quad \parallel \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \cdot \frac{y^{k+1}}{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \cdot y^{k+1} \\ &\quad \parallel \\ &= F(y) \end{aligned}$$

□

Bsp. 22.26:

$$\textcircled{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \xrightarrow[\text{Integration}]{\text{gliedweise}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fkt.} \\ \downarrow \end{array} \right\} \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stammfkt. von exp} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{array} \right\}$$

!!
 $\exp(x) - 1$

$\textcircled{b} \quad f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(1+x) \quad \text{ist stetig diffbar}$

$$\Rightarrow f': (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

Beachte: f' ist auf $(-1, 1)$ durch die folgende Potenzreihe

$$\text{gegeben,} \quad \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$$

$$kR = 1$$

gl. l. m.
Integr.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$\leadsto$ definiert eine
Stammfkt. von f'
auf $(-1, 1)$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in (-1, 1) : f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = c$$

Setze $x=0$ ein:

$$\Rightarrow c = f(0) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{n+1}}{n+1} = 0 - 0 = 0$$

$$\ln(1)=0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, 2) : \ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}$$

(Was für $x \in [1, 2]$ schon bekannt und gilt auch für $x=2$)

§ 21 Uneigentliche Integrale

A) Uneigentliche Integrale

Def. 21.1

① Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und sei $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, y]$ für alle $y \in (a, b)$.
Falls $\int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert, heißt der GW ein **uneigentliches Integral**; es heißt **konvergent**, falls $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$.

② Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[y, b]$ für alle $y \in (a, b)$.
Falls $\int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow a} \int_y^b f(x) dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert, heißt der GW ein **uneigentliches Integral**; es heißt **konvergent**, falls $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}$.

③ Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und für $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ gebe es ein $c \in (a, b)$, so dass $\int_a^c f(x) dx$ und $\int_c^b f(x) dx$ **konvergent** sind, dann heißt $\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ein **konvergentes uneigentliches Integral**.

Beachte: Additivität des Integrals $\Rightarrow$ unabhängig von c !!!

Bsp. 21.2

①
$$\int_0^{\infty} \exp(-x) dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \exp(-x) dx = \lim_{y \rightarrow \infty} -e^{-x} \Big|_0^y = \lim_{y \rightarrow \infty} -e^{-y} + e^0$$

$\parallel$
1

ist konvergent !!!

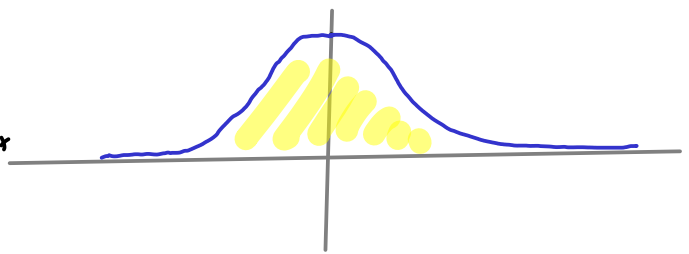
(b) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{y \rightarrow \infty} \int_1^y x^{-a} dx = \lim_{y \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-a+1}}{-a+1} \right|_1^y \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \begin{cases} \infty & , a < 1 \\ -\frac{1}{1-a} & , a > 1 \\ \frac{1}{a-1} & \end{cases} \end{aligned}$$

(c)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{y \rightarrow 1} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{y \rightarrow 1} -2 \cdot \sqrt{1-x} \Big|_0^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} -2 \cdot \sqrt{1-y} + 2 \cdot \sqrt{1-0} = 2 \quad (\text{ist konvergent})$$

(d)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$



$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan(x) \Big|_y^0 + \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} -\arctan(y) + \lim_{y \rightarrow \infty} \arctan(y)$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ван. 21.3

Linearität, Normierung, Additivität, Δ -Ungleichung gelten jeweils auch für (konvergente) unendliche Folgen.

B) Integralkriterium für Reihen

Lemma 21.4 (Noether-Kriterium für unregelmäßige Integrale)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und sei $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrierbar auf $[a, y]$ für alle $y \in (a, b)$.

Wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $\int_a^y f(x) dx \leq s$ für alle $y \in (a, b)$,
dann ist $\int_a^b f(x) dx$ konvergent.

Bewertung:

zu 2.5)
 Satz 2.1: $F: [a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \gamma \mapsto \int_a^\gamma f(x) dx$ ist monoton wachsend,
 da $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b)$

Zeige: $\lim_{y \rightarrow b} F(y)$ existiert in $\mathbb{R}$

Wähle eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$, die monoton wachsend ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$.

$\Rightarrow (F(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist $n \rightarrow \infty$ monoton wachsend und $F(\varepsilon_n) \leq \delta$ für

$$\Rightarrow \exists \underline{I} \in \mathbb{R} : F(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{I}.$$
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : |F(a_n) - \underline{I}| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\underline{\text{Z.z.}}: \lim_{y \rightarrow b} F(y) = I$$

$$\text{Sei } \varepsilon > 0.$$

$$\underline{1. \text{ Fall}}: b \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{I - F(y)}{1}$$

$$\underline{\text{Z.z.}}: \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall y \in [a, b) \text{ mit } |y - b| < \delta_\varepsilon : |F(y) - I| < \varepsilon$$

$$\text{Setze: } \delta_\varepsilon := b - a_{n_\varepsilon} > 0.$$

$$\text{Sei } y \in [a, b) \text{ mit } |y - b| < \delta_\varepsilon = b - a_{n_\varepsilon}$$

$$\Rightarrow a_{n_\varepsilon} < y$$

$$\Rightarrow |F(y) - I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) < \varepsilon \quad (*)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b} F(y) = I$$

$$\underline{2. \text{ Fall}}: b = \infty$$

$$\underline{\text{Z.z.}}: \exists S_\varepsilon : \forall y \in [a, \infty) \text{ mit } y > S_\varepsilon : |F(y) - I| < \varepsilon$$

$$\text{Setze: } S_\varepsilon := a_{n_\varepsilon}. \text{ Sei nun } y \in [a, \infty) \text{ mit } y > S_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |F(y) - I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) < \varepsilon \quad (*)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow b} F(y) = I$$

□

Satz 215:

Sei $a \in \mathbb{N}$ und $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei monoton fallend
und auf $[a, c]$ integrierbar $\forall c \in [a, \infty)$.

Dann sind gleichwertig:

(a) $\int_a^\infty f(x) dx$ ist konvergent.

(b) $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ ist konvergent.

Zudem gilt dann: $\sum_{n=a+1}^\infty f(n) \leq \int_a^\infty f(x) dx \leq \sum_{n=a}^\infty f(n)$

Beweis:

Beachte: für $m \in \mathbb{N}$ mit $m > a$ setze: $Z_m := (a, a+1, a+2, \dots, m)$
ist Zerlegung von $[a, m]$

f monoton fallend

$$\Rightarrow \sum_{n=a+1}^m f(n) = US(f, Z_m) \leq \int_a^m f(x) dx \leq OS(f, Z_m) = \sum_{n=a}^{m-1} f(n)$$

(a) $\Rightarrow$ (b): $S_m := \sum_{n=a}^m f(n) = f(a) + \sum_{n=a+1}^m f(n) \leq f(a) + \int_a^m f(x) dx$

$\uparrow$
 $f(a) + \int_a^\infty f(x) dx$

$\Rightarrow (S_m)_{m \geq a}$ ist monoton wachsend & beschränkt

$\Rightarrow (S_m)_{m \geq a}$ konvergent

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $y \in (a, \infty) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: y \leq m$

$$\Rightarrow \int_a^y f(x) dx \leq \int_a^m f(x) dx \leq \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \leq \sum_{n=a}^\infty f(n) \xrightarrow{27.4.} \int_a^\infty f(x) dx \text{ konvergent}$$

$$\underline{\text{Zu Lemma:}} \quad \sum_{n=a+1}^m f(n) \leq \int_a^m f(x) dx \leq \int_a^{\infty} f(x) dx$$

$$\downarrow m \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=a+1}^{\infty} f(n) \leq$$

$$\int_a^m f(x) dx \leq \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \leq \sum_{n=a}^{\infty} f(n)$$

$$\downarrow m \rightarrow \infty$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \leq$$

□

Bsp. 21.6:

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$.

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \frac{1}{a-1} \quad \text{ist konvergent}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad \text{ist konvergent}$$

Bem. 21.7

$f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_a^{\infty} f(x) dx$ konvergent $\not\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

z.B.: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgendem Graphen auf $[n, n+1]$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{2}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

ist konvergent, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1/n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$

