FB Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2009, Blatt 4

Geometrie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und sollen bis zur nächsten Vorlesungseinheit vorbereitet werden.

Aufgabe 12: Zerlege die Kurve $V(x^4 - x^3y - x^2 + xy) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ in ihre irreduziblen Komponenten. Zeichne ein reelles Bild der Kurve, sprich, zeichne die durch das Polynom definierte Kurve in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 13: Man kann in SINGULAR Polynome über den rationalen Zahlen in Primfaktoren zerlegen. Wir führen dies an einem Beispiel vor:

```
> ring r=0,(x,y),dp;
> factorize(x^3-x^2*y-x*y^2+y^3);
[1]:
   _[1]=1
   _[2]=x-y
   _[3]=x+y
[2]:
   1,2,1
```

Die Eingabe `ring r=0,(x,y),dp;` teilt SINGULAR mit, daß der zugrundeliegende Ring $\mathbb{Q}[x,y]$ ist, und der Befehl `factorize(x^3-x^2*y-x*y^2+y^3);` zerlegt das Polynom $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ in seine Primfaktoren:

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x - y)^2 \cdot (x + y).$$

Die Ausgabe besteht aus zwei Teilen, wobei Teil `[1]` die Primfaktoren enthält und in Teil `[2]` die Vielfachheiten stehen, mit denen die Primfaktoren vorkommen. Der erste "Primfaktor" ist dabei stets nur eine Einheit und kann ignoriert werden.
Im allgemeinen wird ein Polynom, das irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist nicht unbedingt irreduzibel über $\mathbb{C}$ sein, d.h. die Prozedur wird nicht die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{C}[x,y]$ liefern. Dazu müßte man die Prozedur `absFactorize` verwenden. Da die Syntax aber etwas kompliziert ist, beschränken wir uns im folgenden auf Beispiele, wo die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Q}[x,y]$ auch schon die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{C}[x,y]$ ist.
Verwende SINGULAR, um die folgenden Kurven in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ in irreduzible Komponenten zu zerlegen:

a. $V(x^6 + x^5 - 2x^3y^2 - x^2y^2 + y^4)$.

b. $V(x^4y + 2x^2y^3 + y^5 + 3x^2y^2 - y^4)$.

Zeichne die Kurven mit Hilfe von `surfex`.

Aufgabe 14: Die Gleichung des Bildes einer rationalen Parametrisierung

$$\varphi : K \setminus V(w) \longrightarrow \mathbb{A}^2_K : t \mapsto \left(\frac{u(t)}{w(t)}, \frac{v(t)}{w(t)}\right)$$

kann in SINGULAR mit dem Befehl `eliminate` berechnen:

```
> ring r=0,(x,y,t),dp;
> poly u=t^2-1;
> poly v=2t;
> poly w=t^2+1;
> ideal I=w*x-u,w*y-v;
> eliminate(I,t);
_[1]=x2+y2-1
```

Mit den Befehlen definieren wir im Ring $\mathbb{Q}[x,y,t]$ die Polynome u, v und w und eliminieren anschließend aus dem von $w \cdot x - u$ und $w \cdot y - v$ erzeugten Ideal die Variable t. Wir erhalten das Polynom $x^2 + y^2 - 1$ und wissen damit, daß die Punkte im Bild von φ der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

genügen, sie liegen sogar dicht in der Kurve $V(x^2 + y^2 - 1)$.
Berechne mit Hilfe von SINGULAR eine Gleichung für die durch die folgenden rationalen Parametrisierungen gegebenen Kurven:

a. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : t \mapsto \left(t^2 - 1, t^3 - t\right)$.

b. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : t \mapsto \left(\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2}, \frac{t^4-3t^2}{(1+t^2)^2}\right)$.

Zeichne die parametrisierten Kurven mit Hilfe von `surfex`.

Aufgabe 15: Man kann die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kurve näherungsweise mit SINGULAR berechnen:

```
> LIB "solve.lib";
> ring r=0,(x,y),dp;
> ideal I=x^2+y^2-1,x-y;
> solve(I);
[1]:
   [1]:
      -0.70710678
   [2]:
      -0.70710678
[2]:
   [1]:
      0.70710678
   [2]:
      0.70710678
```

Die Gerade $V(x-y)$ schneidet den Kreis $V(x^2+y^2-1)$ in den beiden Punkten

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Diese wurden hier näherungsweise berechnet.
Betrachte die Kurve $C = V(y^2 - x^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

a. Berechne die Zahl der Schnittpunkte von C mit der Geraden $L = V(4y-1)$.

b. Berechne die Zahl der Schnittpunkte von C mit der Geraden $L = V(4x-1)$.

c. Berechne die Zahl der Schnittpunkte von C mit der Geraden $L = V(x-y)$.

Begründe Dein Ergebnis ohne die Zuhilfenahme von SINGULAR. Zeichne in jedem der Beispiele den Schnitt der Kurve C mit der Geraden L mit `surfex`.