FB Mathematik
Thomas Markwig

Geometrie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und sollen bis zur nächsten Vorlesungseinheit vorbereitet werden.

Aufgabe 16: Hat das Polynom $f = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ eine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$? Kläre die Frage durch die Berechnung der Diskriminante von f. Berechne die Nullstellen von f auch (näherungsweise) mit Hilfe von SINGULAR.

Aufgabe 17: Berechne die Diskriminante des Polynoms $f_{a,b,c} = x^4+ax^2+bx+c$. Für welche der folgenden Tripel (a, b, c) hat das Polynom $f_{a,b,c}$ eine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$:

a. $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

b. $(a, b, c) = \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)$.

c. $(a, b, c) = \left(1, 0, -\frac{4}{27}\right)$.

Aufgabe 18: Berechne für folgende Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x, y] = R[y]$, $R = \mathbb{C}[x]$, die Resultante $\mathrm{Res}_{f,g}$ von f und g bezüglich y.

a. $f = y - x^4 + 4x^2$ und $g = y$.

b. $f = y - x^2$ und $g = y - x^4$.

c. $f = x^2 - y^3$ und $g = x - y$.

d. $f = x^2 - y^3$ und $g = y$.

Visualisiere in jedem der Fälle den Schnitt der Kurven $V(f)$ und $V(g)$ mit `surfex`.

Aufgabe 19: Es sei $0 \neq f = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \underline{x}^\alpha \in K[\underline{x}] = K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom in n Veränderlichen und $d \in \mathbb{N}$.

a. Zeige, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für alle α mit $a_\alpha \neq 0$ gilt $\deg\left(\underline{x}^\alpha\right) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d$.

   (b) $f(t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n) = t^d \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n, t]$.

   Polynome mit diesen Eigenschaften heißen *homogen vom Grad* d.

b. Welche der folgenden Polynome sind homogen in $\mathbb{Q}[x, y, z]$ und was ist ihr Grad?

(a) $f = x^2y + 4xz^2 + 3y^2z + z^3$.

(b) $f = 3x^4 - 4xy^3 + 5z^3 - 2xyz^2$.

(c) $f = 3x + 5y - 4z$.

Aufgabe 20: Es sei $0 \neq f \in K[\underline{x}]$ ein Polynom. Wir sammeln in f_i alle Terme von f vom Grad i. Dann gilt offenbar $f = f_0 + \ldots + f_d$ für $d = \deg(f)$. Wir nennen die f_i die homogenen Bestandteile von f. Zerlege die folgenden Polynome in ihre homogenen Bestandteile:

a. $f = 2x^3 - 5x^2y + x + 2x^2 - 7xy + 3y^2 + y - 4xy^2 + 3y^3 \in \mathbb{C}[x, y]$.

b. $f = x^4 - 3x + 3xyz^2 + 5x^2y + x^2 - 4y^3 + 2y + 3z - 1 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$.

Aufgabe 21: Ist $G \in K[\underline{x}]$ homogen vom Grad m und ist $H \in K[\underline{x}]$ homogen vom Grad n, dann ist $G \cdot H$ homogen vom Grad $m + n$.

Aufgabe 22: Ist F homogen und sind $G, H \in K[\underline{x}]$ mit $F = G \cdot H$, dann sind auch G und H homogen. Zerlege das Polynom $F = x^4 + x^3y + xy^3 + y^4$ in seine Primfaktoren in $\mathbb{Q}[x, y]$.