FB Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2009, Blatt 6

Geometrie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und sollen bis zur nächsten Vorlesungseinheit vorbereitet werden.

Aufgabe 23: Es seien $f, g \in K[x, y]$ zwei Polynome und $F, G \in K[x, y, z]$ zwei homogene Polynome. Ferner bezeichne

$$\varphi : \mathbb{A}^2_K \hookrightarrow \mathbb{P}^2_K : (x, y) \mapsto (x : y : 1)$$

die Einbettung der affinen Ebene in die projektive Ebene und es sei $E = \mathrm{Im}(\varphi)$. Zeige:

a. Ist $f = \sum_{(i,j)} a_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j$, so ist $f^h = \sum_{(i,j)} a_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^{\deg(f)-i-j}$.

b. $(f^h)^{dh} = f$.

c. $(f \cdot g)^h = f^h \cdot g^h$.

d. Wenn f ein Teiler von g ist, so ist f^h ein Teiler von g^h.

e. $z^{\deg(F)-\deg(F^{dh})} \cdot (F^{dh})^h = F$.

f. $z \not| F \iff (F^{dh})^h = F$.

g. $z \not| f^h$.

h. $\varphi\big(V(f)\big) = V(f^h) \cap E$.

i. $\varphi\big(V(F^{dh})\big) = V(F) \cap E$.

Aufgabe 24: Es seien $F = ax+by+cz$ und $G = a'x+b'y+c'z$ zwei homogene lineare Polynome in $K[x, y, z]$. Zeige:

$$V(F) = V(G) \iff \exists\, \lambda \in K \setminus \{0\} \,:\, \lambda \cdot (a, b, c) = (a', b', c').$$

Aufgabe 25: Es sei $h \in \mathbb{C}[x, y]$ ein homogenes Polynom vom Grad d. Zeige:

a. Es gibt komplexe Zahlen $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, d$, mit

$$h = (a_1 \cdot x - b_1 \cdot y) \cdots (a_d \cdot x - b_d \cdot y).$$

b. Hat das Polynom $h(x, 1) \in \mathbb{C}[x]$ unendlich viele Nullstellen, so ist $h = 0$ das Nullpolynom.

c. Schreibe die homogenen Bestandteile des Polynoms f in Aufgabe 19 a. als Produkte von linearen Polynomen wie in Teil a. dieser Aufgabe.

Aufgabe 26: Es seien $f \in K[x,y]$ ein Polynom und $F \in K[x,y,z]$ ein homogenes Polynom mit $Z \not| F$.

a. Zeige, f ist genau dann irreduzibel in $K[x,y]$, wenn f^h irreduzibel in $K[x,y,z]$ ist.

b. Zeige, F ist genau dann irreduzibel in $K[x,y,z]$, wenn F^{dh} irreduzibel in $K[x,y]$ ist.

c. Ist $K = \mathbb{C}$, so gilt:

(a) $V(f)$ ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, wenn $V(f^h)$ irreduzibel in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ist.

(b) $V(F)$ ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, wenn $V(F^{dh})$ irreduzibel in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ ist.

Aufgabe 27: Welche der folgenden Punkte der projektiven Ebene stimmen überein?

a. $P_1 = (2:3:1)$

b. $P_2 = (-1:1:1)$

c. $P_3 = (3:-3:3)$

d. $P_4 = (4:1:1)$

e. $P_5 = (6:9:3)$

f. $P_6 = (-4:-6:-2)$

Aufgabe 28: Berechne die Schnittpunkte der projektiven Kurve $V(x^3z + 2xyz^2 - 3xz^3 + x^4 - x^3y)$ mit der unendlich fernen Geraden $V(z)$.

Aufgabe 29: Visualisiere mit `surfex` ein Modell der projektiven Ebene mit den drei Koordinatenachsen $V(x)$, $V(y)$ und $V(z)$.

Aufgabe 30: Bilde den projektiven Abschluß von drei parallelen affinen Geraden und visualisieren Sie diese dann mit `surfex`.

Aufgabe 31: Homogenisiere $xy-1$ und visualisiere die zugehörigen ebenen affinen und projektiven Kurven mit `surfex`.

Aufgabe 32: Berechne ein Minimalpolynom der projektiven algebraischen Kurve, die durch die rationale Parametrisierung

$$(s,t) \mapsto \left(st^2 : s^3 + t^3 : s^2t - t^3\right)$$

gegeben wird und visualisiere sie mit `surfex`.