FB Mathematik — Sommersemester 2011, Blatt 4

Thomas Markwig — Pablo Luka

Geometrie

Abgabetermin: Freitag, 17.06.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 13: Es sei $0 \neq f = \sum_\alpha a_\alpha \cdot \underline{x}^\alpha \in K[\underline{x}] = K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Polynom in n Veränderlichen und $d \in \mathbb{N}$.

a. Zeige, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Für alle α mit $a_\alpha \neq 0$ gilt $\deg\left(\underline{x}^\alpha\right) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d$.

   (b) $f(t \cdot x_1, \ldots, t \cdot x_n) = t^d \cdot f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n, t]$.

   Polynome mit diesen Eigenschaften heißen *homogen vom Grad* d.

b. Welche der folgenden Polynome sind homogen in $\mathbb{Q}[x, y, z]$? Was ist ihr Grad?

   (a) $f = x^2y + 4xz^2 + 3y^2z + z^3$.

   (b) $f = 3x^4 - 4xy^3 + 5z^3 - 2xyz^2$.

   (c) $f = 3x + 5y - 4z$.

Aufgabe 14: Es sei $0 \neq f \in K[\underline{x}]$ ein Polynom. Wir sammeln in f_i alle Terme von f vom Grad i. Dann gilt offenbar $f = f_0 + \ldots + f_d$ für $d = \deg(f)$. Wir nennen die f_i die homogenen Bestandteile von f. Zerlege die folgenden Polynome in ihre homogenen Bestandteile:

a. $f = 2x^3 - 5x^2y + x + 2x^2 - 7xy + 3y^2 + y - 4xy^2 + 3y^3 \in \mathbb{C}[x, y]$.

b. $f = x^4 - 3x + 3xyz^2 + 5x^2y + x^2 - 4y^3 + 2y + 3z - 1 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$.

Aufgabe 15:

a. Ist $G \in K[\underline{x}]$ homogen vom Grad m und ist $H \in K[\underline{x}]$ homogen vom Grad n, dann ist $G \cdot H$ homogen vom Grad $m + n$.

b. Ist F homogen und sind $G, H \in K[\underline{x}]$ mit $F = G \cdot H$, dann sind auch G und H homogen. Zerlege das Polynom $F = x^4 + x^3y + xy^3 + y^4$ in seine Primfaktoren in $\mathbb{Q}[x, y]$.

Aufgabe 16: Welche der folgenden Punkte der projektiven Ebene stimmen überein?

a. $P_1 = (2 : 3 : 1)$

b. $P_2 = (-1 : 1 : 1)$

c. $P_3 = (3 : -3 : 3)$

d. $P_4 = (4 : 1 : 1)$

e. $P_5 = (6 : 9 : 3)$

f. $P_6 = (-4 : -6 : -2)$

Aufgabe 17: Es seien $f, g \in K[x, y]$ zwei Polynome und $F, G \in K[x, y, z]$ zwei homogene (siehe Aufgabe 13) Polynome.
Wir definieren die Homogenisierung f^h des Polynoms f als

$$f^h := z^{\deg(f)} \cdot f\left(\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}\right) \in K[x, y, z]$$

und die Dehomogenisierung F^{dh} von F als

$$F^{dh} := F(x, y, 1) \in K[x, y].$$

Zeige:

a. Ist $f = \sum_{(i,j)} a_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j$, so ist $f^h = \sum_{(i,j)} a_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j \cdot z^{\deg(f)-i-j}$.

b. $(f^h)^{dh} = f$.

c. $(f \cdot g)^h = f^h \cdot g^h$.

d. Wenn f ein Teiler von g ist, so ist f^h ein Teiler von g^h.

e. $z^{\deg(F)-\deg(F^{dh})} \cdot (F^{dh})^h = F$.

f. $z \nmid F \iff (F^{dh})^h = F$.

g. $z \nmid f^h$.