FB Mathematik | Sommersemester 2011, Blatt 6
Thomas Markwig | Pablo Luka

Geometrie

Abgabetermin: Montag, 18.07.2011, 10:00 Uhr

Aufgabe 21: Wir haben in der Vorlesung gelernt, wie man die Tangente an eine projektive Kurve $V(F)$ mit Hilfe des Gradienten von F berechnen kann. Dies geht jedoch nur, wenn der Gradient nicht $(0,0,0)$ ist; man sagt dann auch, daß der Punkt ein singulärer Punkt der Kurve ist. Berechne für folgende ebenen projektiven Kurven $V(F)$ die Tangente in dem angegebenen Punkt P, sofern dies möglich ist:

a. $F = x^2 + y^2 - z^2$, $P = (0:1:1)$.

b. $F = x^2 + y^2 - z^2$, $P = (3:4:5)$.

c. $F = x^2z + y^3$, $P = (0:0:1)$.

d. $F = x^2z + y^3$, $P = (1:0:0)$.

e. $F = x^2y - y^3$, $P = (0:0:1)$.

f. $F = x^2y - y^3$, $P = (1:1:1)$.

Welche der Punkte sind singuläre Punkte der gegebenen Kurve?

Aufgabe 22: Ist $f \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und $f' \in \mathbb{R}[x]$ seine formale Ableitung, so kann man zeigen, daß

$$\det(S_{f,f'}) = \prod_{1\leq \neq j \leq n} (a_i - a_j)$$

gilt, wenn $f = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$ die Faktorisierung von f in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ ist und $S_{f,f'}$ die Sylvestermatrix ist.

a. Überprüfe die Aussage für die Polynome $f = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$ und $f = x^3 - 5x^2 + x - 5$.

b. Begründe, weshalb $\det(S_{f,f'})$ genau dann Null ist, wenn f über $\mathbb{C}$ eine mehrfache Nullstelle hat.

c. Vergleiche für $f = ax^2 + bx + c$ die Determinante $\det(S_{f,f'})$ mit der Diskriminante des Polynoms, die ja ebenfalls genau dann Null ist, wenn f eine doppelte Nullstelle besitzt. Wie paßt das zusammen?

d. Überprüfe, ob das Polynom $f = x^5 + 4x^4 + 11x^3 + 20x^2 + 21x + 18$ eine mehrfache Nullstelle über $\mathbb{C}$ hat mit Hilfe der Determinante $\det(S_{f,f'})$. Faktorisiere f auch über $\mathbb{Q}$ mittels SINGULAR.

e. Begründe, weshalb ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, das einen mehrfachen irreduziblen Faktor besitzt, auch eine mehrfache Nullstelle über $\mathbb{C}$ haben muß. Leite daraus ab, wie man mit Hilfe eines größten gemeinsamen Teilers von f und f' feststellen kann, ob f eine mehrfache Nullstelle hat.

Aufgabe 23: Berechne für folgende Polynome f und g die Schnittvielfachheit von $V(f)$ und $V(g)$ im Punkt $(0,0)$:

a. $f = x^3 + 4xy^4$ und $g = x + y$.

b. $f = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3$ und $g = x + 2y$.

c. $f = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3$ und $g = y$.

d. $f = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3$ und $g = y - x^2$.

e. $f = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3$ und $g = y^2 - x$.

f. $f = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3$ und $g = y^2 - x^2$.

In welchen Fällen gilt die Gleichheit

$$\mathrm{mult}_p(f \cap g) = \mathrm{mult}_p(f) \cdot \mathrm{mult}_p(g),$$

wenn $\mathrm{mult}_p(f)$ der kleinste Exponent eines Monoms ist, das in f vorkommt. Visualisiere jeweils $V(f)$ und $V(g)$ im Punkt $p = (0,0)$.

Aufgabe 24: Betrachte die affinen ebenen Kurven, die durch die Parametrisierungen

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : t \mapsto \left(t^2 - 1, t^3 - t\right)$$

und

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : t \mapsto \left(t^3, t^2\right).$$

gegeben sind.

a. Berechne mit Hilfe von SINGULAR Polynome f und g mit $V(f) = \mathrm{Im}(\varphi)$ und $V(g) = \mathrm{Im}(\psi)$.

b. Zeige, daß die Schnittvielfachheit von $V(f)$ und $V(g)$ im Punkt $p = (0,0)$ die Gleichung

$$\mathrm{mult}_p(f \cap g) = \mathrm{ord}_t\left(f(t^3, t^2)\right),$$

erfüllt, wobei die Ordnung ord_t eines Polynoms in t der niedrigste Grad eines Monoms des Polynoms ist.