

Höhere Mathematik Funktionentheorie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in den Übungsstunden bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 20: [Joukowski-Funktion]

Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

- Zeige, daß das Bild des Einheitskreises $\partial K_1(0)$ unter f das Intervall $[-1, 1]$.
- Zeige, daß das Bild des Kreises $\partial K_r(0)$ für $r \neq 1$ ist eine Ellipse und bestimme die zugehörige Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Zeige, daß die Einschränkung

$$f|_D : K_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

auf die offene Kreisscheibe $K_1(0)$ eine konforme Abbildung ist.

Aufgabe 21: Berechne das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} f(z) dz$ für folgende Kurven und Funktionen:

- $f(z) = \bar{z}$ und Γ der Kreisbogen von -1 bis i auf dem Einheitskreis.
- $f(z) = \bar{z}$ und Γ die Strecke von -1 bis i .
- $f(z) = e^{\pi z}$ und Γ wie in (a).
- $f(z) = e^{\pi z}$ und Γ wie in (b).
- $f(z) = z^2$ und Γ die Summe aus dem Kreisbogen von 1 bis i auf dem Einheitskreis und der Strecke von i bis $-1 + i$.

Aufgabe 22: Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

- $\int_{|z-2|=1} \frac{z^3+2z^2+5}{z^3+4z} dz,$
- $\int_{|z|=1} \frac{z^3+2z^2+5}{z^3+4z} dz,$
- $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^{z \cdot \frac{\pi}{2}}}{z^2+1} dz.$

Aufgabe 23: Berechne das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z - \pi i} dz$$

entlang der Kurve

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| + |z + 3| = 10\}.$$