Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2014, Blatt 5

Höhere Mathematik Funktionentheorie

Abgabetermin: Montag, 30/06/2014, 10:00

Die Aufgaben müssen zur Korrektur eingereicht werden und die Punkte zählen bei der Zulassung zur Klausur. Eine Abgabe in Kleingruppen ist nicht zulässig. Für die Aufgabe 29 braucht man Ergebnisse der Vorlesung vom 26. Juni.

Aufgabe 24: (4 Punkte)

Zeige, daß die Funktion

$$u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto e^x \cdot \big(x\cos(y) - y\sin(y)\big)$$

harmonisch ist und bestimme eine harmonisch konjugierte Funktion zu u.

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Überprüfe, ob es eine natürliche Zahl n gibt, so daß folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{z\to 0} z^n \sin\left(\tfrac{1}{z}\right).$$

Aufgabe 26: (8 Punkte)

Berechne für $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ und für $f(z) = \frac{1}{z^3}$ das Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\,dz$ entlang des Streckenzugs Γ von -1 über $-i$ nach 1.

Aufgabe 27: (12 Punkte)

Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

a. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin(z)+z\cdot e^z}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz.$ b. $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{z^2\cdot e^z}{z^3-z^2+z-1}\,dz.$ c. $\displaystyle\int_{|z+1|+|z-3|=6} \frac{\cos(z)\cdot e^{iz}}{(z-\frac{\pi}{2})^3}\,dz.$

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Wählt man einen Zweig der Wurzelfunktion, so definiert die Funktionsvorschrift $f(z) = \ln\sqrt{1+z^2}$ lokal in $z_0 = 0$ eine holomorphe Funktion. Berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktion im Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und bestimme deren Konvergenzradius.

Aufgabe 29: (12 Punkte)

a. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n-1}$ für alle $n \geq 0$ für die Gebiete $G = K_1(0)$ sowie für $G = \mathbb{C}$?

b. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : K_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ für $n \geq 0$?

c. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : K_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!}{n}$ für $n \geq 1$?

Aufgabe 30: (6 Punkte)

Zeige, sind $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ganz mit $|f(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $g = c \cdot f$.