Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 3

Höhere Mathematik Funktionentheorie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in den Übungsstunden bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 14: Überprüfe, ob die folgenden Funktionen $f = u + i \cdot v : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ Polynomfunktionen in $z = x + iy$ sind und finde ggf. die Funktionsvorschrift in z.

a. $u(x + iy) = x^2 - y^2 + 2x + 1$, $v(x + iy) = 2xy + 2y$.

b. $u(x + iy) = x^2 + y^2 - 1$, $v(x + iy) = 2x^2 - 2y^2$.

Aufgabe 15: Bestimme alle Punkte, in denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind:

a. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{Re}(z)^2 + 2 \cdot \mathrm{Im}(z) + i \cdot |z|^2$.

b. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto e^{z^2+\overline{z}^2}$.

Aufgabe 16: Zeige mittels der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \exp(z^2 + 1)$$

ganz ist.

Aufgabe 17: Es $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + i \cdot v : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph. Was muß für u und v gelten, daß auch $\overline{f} = u - i \cdot v$. holomorph ist?

Aufgabe 18: Überprüfe, ob die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & \text{für } z \neq 0, \\ 0, & \text{für } z = 0, \end{cases}$$

den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in $a = 0$ genügt und ob sie dort komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 19: Zeige, daß die folgenden Funktionen $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch sind und berechne die harmonisch konjugierte Funktion v. Ferner gebe man die $f = u + i \cdot v$ als Funktionsvorschrift in der Variablen $z = x + iy$ an.

a. $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto 2x \cdot (1 - y)$.

b. $u : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto x^3 - 3xy^2 + 2x - 1$.

Aufgabe 20: [Joukowski-Funktion]
Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a. Zeige, daß das Bild des Einheitskreises $\partial K_1(0)$ unter f das Intervall $[-1, 1]$ ist.

b. Zeige, das Bild des Kreises $\partial K_r(0)$ für $r \neq 1$ ist eine Ellipse und bestimme die zugehörige Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

c. Zeige, daß die Einschränkung

$$f_| : K_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] : z \mapsto \frac{1}{2} \cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)$$

auf die offene punktierte Kreisscheibe $K_1(0) \setminus \{0\}$ eine konforme Abbildung ist.