Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Höhere Mathematik Funktionentheorie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in den Übungsstunden bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 21: Berechne das Kurvenintegral $\int_\Gamma f(z)\ dz$ für folgende Kurven und Funktionen:

a. $f(z) = \overline{z}$ und Γ der Kreisbogen von -1 bis i auf dem Einheitskreis.

b. $f(z) = \overline{z}$ und Γ die Strecke von -1 bis i.

c. $f(z) = e^{\pi z}$ und Γ wie in (a).

d. $f(z) = e^{\pi z}$ und Γ wie in (b).

e. $f(z) = z^2$ und Γ die Summe aus dem Kreisbogen von 1 bis i auf dem Einheitskreis und der Strecke von i bis $-1+i$.

Aufgabe 22: Berechne die folgenden Kurvenintegrale:

a. $\int_{|z-2|=1} \frac{z^3+2z^2+5}{z^3+4z}\ dz$,

b. $\int_{|z|=1} \frac{z^3+2z^2+5}{z^3+4z}\ dz$,

c. $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3} \frac{e^{z\cdot\frac{\pi}{2}}}{z^2+1}\ dz$.

Aufgabe 23: Berechne das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z-\pi i}\ dz$$

entlang der Kurve

$$\Gamma = \big\{z \in \mathbb{C}\ \big|\ |z-3| + |z+3| = 10\big\}.$$

Aufgabe 24: Überprüfe, ob die folgenden geschlossenen Wege Γ_0 und Γ_1 in $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop sind und finde ggf. eine Homotopie:

a. $\Gamma_0 = \partial K_1(0)$ und $\Gamma_1 = \partial K_3(1)$.

b. $\Gamma_0 = \partial K_1(0)$ und $\Gamma_1 = \partial K_1(3)$.

Aufgabe 25:

a. Zeige, daß eine Teilmenge K von $\mathbb{C}$ genau dann ein Kreis ist, wenn es Zahlen $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$ gibt mit $a \neq 0$, $|b|^2 - ac > 0$ und

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid a \cdot z \cdot \overline{z} + b \cdot z + \overline{b} \cdot \overline{z} + c = 0\}.$$

b. Zeige, daß die *Inversion am Kreis*

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z}$$

Kreise in ihrem Definitionsbereich auf Kreise abbildet.

c. Zeige, eine allgemeine Möbiustransformation

$$g : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

mit $ad - bc \neq 0$ läßt sich stets als Verkettung von Translationen, Drehstreckungen und einer Inversion am Kreis schreiben.

d. Zeige, daß jede Möbiustransformation eine konforme Abbildung ist und Kreise in ihrem Definitionsbereich in Kreise überführt.