Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 6

Höhere Mathematik Funktionentheorie

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in den Übungsstunden bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 31: Untersuche, ob die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^z$ für $|z| < 1$ und $f(z) = e^{\frac{z}{|z|}}$ für $|z| \geq 1$ holomorph ist.

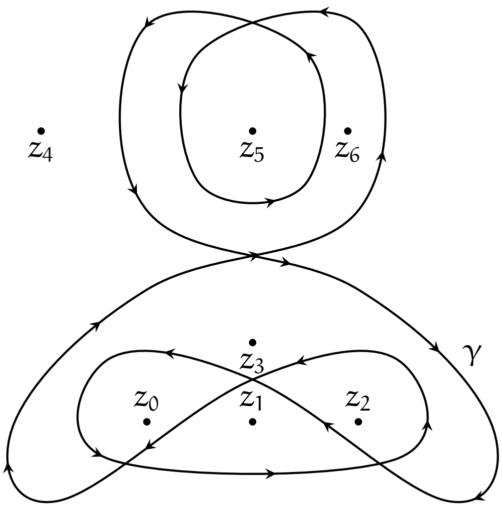
Aufgabe 32: Bestimme alle Singularitäten folgender Funktionen und gib jeweils den Typ der Singularität ggf. inklusive der Polordnung an:

a. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ b. $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2}$ c. $f(z) = \frac{\cos(\frac{1}{z-2})\cdot(e^{z-1}-1)}{z^3+3z^2-4}$ d. $f(z) = \frac{e^z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n-1)!}}{z+1}$

Aufgabe 33: Bestimme die Laurententwicklung folgender Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sowie ihre Residuen in $z_0 = 1$.

a. $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$ b. $f(z) = \frac{e^{3z}}{(z-1)^4}$ c. $f(z) = z \cdot \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)$

Aufgabe 34: Bestimme die Umlaufzahl der Kurve γ in folgendem Bild in den Punkten $z_0, \ldots, z_6$. Färbe das Innere der Kurve bunt ein.



Aufgabe 35: Bestimme die Singularitäten und Residuen folgender Funktionen:

a. $f(z) = \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^3}$ b. $f(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ c. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)\cdot(z-i)^3}$

Aufgabe 36: Berechne die folgenden eigentlichen und uneigentlichen Integrale:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2(t)}\,dt$ b. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^4}\,dt$ c. $\int_0^{\infty} \frac{t\cdot\sin(t)}{t^2+4}\,dt$

Aufgabe 37: Was kann man aus dem folgenden Phasenprotrait über Nullstellen und Polstellen der Funktion ablesen?