

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Die Übungen von Blatt 1 werden in den Übungsstunden der zweiten Vorlesungswoche als Präsenzaufgaben bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 1:

- (a) Überprüfe, ob die Menge $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe ist:

$$G \times G \longrightarrow G : ((a, b), (a', b')) \mapsto (a, b) \cdot (a', b') := (aa', bb').$$

- (b) Zeige, wenn $(G, *)$ und (H, \circ) abelsche Gruppen sind, dann wird $G \times H$ durch folgende zweistellige Operation ebenfalls eine abelsche Gruppe:

$$(G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H : ((a, b), (c, d)) \mapsto (a * c, b \circ d).$$

Aufgabe 2: Sei M eine Menge. Für zwei Abbildungen $f : M \rightarrow M$ und $g : M \rightarrow M$ definieren wir die *Komposition* von f und g durch

$$f \circ g : M \rightarrow M : m \mapsto f(g(m)).$$

Wir nennen eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $f' : M \rightarrow M$ gibt, so daß

$$f \circ f' = f' \circ f = \text{id}_M,$$

wobei $\text{id}_M : M \rightarrow M : m \mapsto m$ die Identität auf M ist. Die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen von M bezeichnen wir mit

$$\text{Sym}(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Zeige, $(\text{Sym}(M), \circ)$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 3: Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x + b.$$

Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $(\text{Sym}(\mathbb{R}), \circ)$?

(a) $U = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$,

(b) $V = \{f_{a,1} \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

Aufgabe 4: Beweise, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$$

und

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Körper ist.