Fachbereich Mathematik Wintersemester 2019, Blatt 2
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 24.10.2019, 10:00

Aufgabe 5:

a. Untersuche, ob $G = \{2 + 3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Multiplikation ganzer Zahlen als Verknüpfung eine Gruppe ist.

b. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{R}$ mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe:

$$x * y = ax + ay + b \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6: Zeige, eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{Z}$ ist genau dann eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, wenn es eine ganze Zahl $n \geq 0$ gibt mit $U = n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 7: Überprüfe, ob die folgende Abbildung

$$\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : z \mapsto 4 \cdot z + 2$$

ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

Aufgabe 8:

a. Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

$$\text{(i)}\ \ z = 2i - 3 \qquad \text{(ii)}\ \ z = \frac{5 - i}{5 + 2i} \qquad \text{(iii)}\ \ z = \frac{(1 + i)^7}{(1 - i)^4}$$

b. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen:

$$\text{(i)}\ \ |z| \cdot |w| = |z \cdot w| \qquad \text{(ii)}\ \ z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{(iii)}\ \ \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \leq |z|$$