Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2019, Blatt 3

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 31.10.2019, 10:00

Aufgabe 9:

a. Es sei $\mathbb{F}_{13} = \{0, 1, \ldots, 12\}$ der in der Vorlesung eingeführte Körper mit 13 Elementen. Berechne die folgenden Terme:

$$12 + 7 + 9, \quad 7 \cdot 5, \quad 6^2, \quad 4^{-1} \quad \text{und} \quad 5 \cdot 3^{-1}.$$

b. Finde eine Zahl $x \in \mathbb{F}_{13}$, so daß jede Zahl ungleich 0 eine Potenz von x ist.

Aufgabe 10: Gegeben seien folgende Matrizen und Vektoren über den reellen Zahlen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die folgenden Terme:

$$A + B, \quad B \circ x, \quad A \circ C \quad \text{und} \quad B \circ B^t.$$

Aufgabe 11:

a. Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt $(A \circ B)^t = B^t \circ A^t$.

b. Zeige, die Menge

$$\mathrm{Gl}_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \exists\, B \in \mathrm{Mat}_n(K) : \; B \circ A = A \circ B = \mathbb{1}_n\}$$

ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

Aufgabe 12: [Nilpotente Matrizen]
Es sei $N = (n_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix, für die die Einträge auf der oberen Nebendiagonale alle 1 sind und für die alle anderen Einträge 0 sind, d.h. $n_{ij} = \delta_{j-i,1}$.
Zeige für $k = 1, \ldots, n$, daß die Einträge der Matrix $N^k = \left(n_{ij}^{(k)}\right)$ auf der k-ten oberen Nebendiagonale alle 1 und alle anderen Einträge 0 sind, d.h. $n_{ij}^{(k)} = \delta_{j-i,k}$. Insbesondere ist $N^n = 0$ und $N^k \neq 0$ für $k < n$.

Zusatzaufgabe (Diese Aufgabe ist für die Zulassung zur Klausur nicht relevant und stellt lediglich ein Zusatzangebot dar.)
Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

$$\begin{aligned} X &\Rightarrow Y, \\ \neg Y &\Rightarrow \neg X, \\ \neg(X &\wedge \neg Y). \end{aligned}$$