Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 07.11.2019, 10:00

Aufgabe 13: Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Wir definieren auf $\mathcal{P}(M)$ eine Addition mittels der symmetrischen Differenz

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ und eine Multiplikation mit Skalaren aus dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ durch

$$\lambda \cdot A := \begin{cases} A, & \text{wenn } \lambda = 1, \\ \emptyset, & \text{wenn } \lambda = 0. \end{cases}$$

Zeige, daß $(\mathcal{P}(M), +, \cdot)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

Aufgabe 14: Welche der folgenden Teilmengen von K^3 sind Unterräume des K^3? Begründe Deine Antworten.

a. $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_2 = 2x_3\}$ für $K = \mathbb{R}$.

b. $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + x_2 + x_3 = a + 1\}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$ für $K = \mathbb{R}$.

c. $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$ für $K = \mathbb{R}$.

d. $\{(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (1, 1, 0)^t, (0, 0, 0)^t\}$ für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{F}_2$.

Aufgabe 15: Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Teilmengen

$$U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$U' = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige, U und U' sind Unterräume von V und es gilt $V = U \oplus U'$.

Aufgabe 16: Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeige

$$\mathrm{Ker}(f + g) \supseteq \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$$

und

$$\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).$$

Finde außerdem Beispiele, sodass die Inklusionen strikt sind.