Fachbereich Mathematik Wintersemester 2019, Blatt 5
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 14.11.2019, 10:00

Aufgabe 17:

a. Sei V ein K-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ K-linear und $U \leq V$ ein Unterraum von V mit $f(U) \subseteq U$. Zeige, daß durch

$$f_{V/U} : V/U \longrightarrow V/U : \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

eine K-lineare Abbildung definiert wird.

b. Sei V ein K–Vektorraum und $U, U' \leq V$. Zeige

$$U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'.$$

Aufgabe 18: Sei V ein K-Vektorraum. $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *Projektion*, falls $f^2 = f$ gilt.

a. Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) f ist eine Projektion,

(b) $\mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion,

(c) $\mathrm{Im}\left(\mathrm{id}_V - f\right) = \mathrm{Ker}(f)$,

b. Zeige auch, sind obige Bedingungen erfüllt, so gilt zudem $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Aufgabe 19: Welche der folgenden Familien sind linear unabhängig / Erzeugendensysteme / Basen von $\mathbb{R}^2$?

$$(1)\ \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \qquad (2)\ \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) \qquad (3)\ \left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$(4)\ \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right) \qquad (5)\ \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 20:

a. Zeige, ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine linear unabhängige Familie in einem K-Vektorraum V, so ist auch die Familie $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ linear unabhängig.

b. Zeige, ist $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung und ist F eine Familie von Vektoren in V, so ist $f\big(\mathrm{Lin}(F)\big) = \mathrm{Lin}\left(f(x) \mid x \in F\right)$.