Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2019, Blatt 6

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 21.11.2019, 10:00

Aufgabe 21:

a. Seien V und W zwei K-Vektorräume, $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung und B eine Basis von V.

   (a) Genau dann ist f surjektiv, wenn $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

   (b) Genau dann ist f injektiv, wenn $f(B)$ linear unabhängig ist.

   (c) Genau dann ist f bijektiv, wenn $f(B)$ eine Basis von W ist.

b. Finde einen K-Vektorraum V sowie zwei K-lineare Abbildungen $f, g : V \longrightarrow V$, so dass Folgendes gilt:

   (a) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

   (b) g ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Aufgabe 22: Es sei $B := \big((2,0,3)^t, (1,2,1)^t, (4,2,1)^t\big)$.

a. Zeige, B ist eine Basis von $\mathbb{F}_5^3$.

b. Ersetze *mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz* zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(3,3,2)^t$ und $(1,1,3)^t$.

Aufgabe 23: Sei V ein K-Vektorraum mit $1 \leq \dim_K(V) = n < \infty$ und $g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeige, es gibt eine Zahl $0 \leq k \leq n$, so daß für alle $i \geq 1$ gilt

$$\mathrm{Ker}(g^0) \subsetneqq \mathrm{Ker}(g^1) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker}(g^{k+i}).$$

Aufgabe 24: Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 5$, und U und U' Unterräume mit $\dim_K(U) = 3$ und $\dim_K(U') = 4$.

a. Welche Werte kann $\dim_K(U \cap U')$ annehmen?

b. Gib für jeden der Werte von $\dim_K(U \cap U')$ ein Beispiel (K, V, U, U') an.