Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2019, Blatt 7
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 28.11.2019, 10:00

Aufgabe 25:

a. Es seien $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume eines K-Vektorraums V mit Basen $B_1, \ldots, B_k$. Zeige, genau dann ist $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ die direkte Summe der U_i, wenn $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ eine Basis von V ist.

b. Zeige, für jeden Körper K sind die Mengen $U := \{(a_1, .., a_n)^t \in K^n \mid a_1 = \cdots = a_n\}$ und $U' := \{(a_1, .., a_n)^t \in K^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ Unterräume von K^n, und bestimme $\dim_K(U), \dim_K(U')$ und $\dim_K(U + U')$.

Aufgabe 26: Betrachte den Vektorraum $P_n := \left\{\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mid a_k \in K\right\}$ der Polynome vom Grad höchstens n mit Basis $B = (t^0, t^1, \ldots, t^n)$ und die formale Ableitung

$$d : P_n \longrightarrow P_n : \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

a. Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(d)$ und den Rang von d.

b. Zeige, dass im Fall $n = 3$ auch $D = (t^0, t^0 + t^1, t^1 + t^2, t^2 + t^3)$ eine Basis von P_3 ist und berechne die Basiswechsel T_B^D und T_D^B sowie die Matrixdarstellung $M_D^D(d)$.

Aufgabe 27: [Zyklische Unterräume]
Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $0 \neq x \in V$ und $m > 0$ mit $f^{m-1}(x) \neq 0$ und $f^m(x) = 0$.

a. Zeige, $B = \left(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \ldots, f(x), x\right)$ ist eine Basis von $U = \mathrm{Lin}(B)$.

b. Zeige, U ist f-invariant, und bestimme $M_B^B(f_U)$.

Aufgabe 28:

a. Zeige, für $0 \neq \lambda \in K$ sowie $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ gilt

$$Q_i^j(\lambda) = S_j\left(\lambda^{-1}\right) \circ Q_i^j(1) \circ S_j(\lambda).$$

b. Seien $A \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, dann gilt

$$\mathrm{rang}(B \circ A) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}.$$

c. Überführe die folgende Matrix in reduzierte Zeilen-Stufen-Form und berechne ihren Rang:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 6, \mathbb{Q}).$$