Fachbereich Mathematik Wintersemester 2019, Blatt 8
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 05.12.2019, 10:00

Aufgabe 29:

a. Berechne die Inverse der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

b. Transformiere die folgende Matrix B in Normalform bezüglich Äquivalenz und gib auch die Transformationsmatrizen S und T an:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{F}_3).$$

Bestimme insbesondere den Rang der Matrix. Beachte: Grundkörper ist $\mathbb{F}_3$!

c. Berechne den Rang der folgenden Matrix C in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$$

Aufgabe 30:

a. Es seien $U = \mathrm{Lin}\big((1,0,1,1)^t, (-1,1,0,0)^t\big)$ und $U' = \mathrm{Lin}\big((1,0,1,0)^t, (1,1,1,1)^t\rangle\big)$. Zeige, $\mathbb{R}^4 = U \oplus U'$.

b. Betrachte den Unterraum

$$U = \{(a_1, .., a_5)^t \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 - 2a_2 = 0 = 2a_4 + a_5\} \leq \mathbb{R}^5$$

und bestimme $\dim_{\mathbb{R}}(U)$, sowie eine Basis von U, die den Vektor $(2,1,1,-1,2)^t$ enthält. Berechne anschließend eine Basis von $\mathbb{R}^5/U$.

Aufgabe 31: Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$$

und bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes von f_A und prüfe f_A auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 32:

a. Bestimme mit dem aus der Vorlesung bekannten Verfahren die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

b. Bestimme mit dem aus der Vorlesung bekannten Verfahren die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & ty & + & z & = & 1 \\ tx & + & ty & + & z & = & 1+t \end{array}$$