Fachbereich Mathematik Wintersemester 2019, Blatt 9
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 12.12.2019, 10:00

Aufgabe 33: Es sei E die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, $B = \big((1,1)^t, (1,-1)^t\big)$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Berechne $M_E^E(f)$ und zeige $f^2 = f$.

b. Bestimme Kern und Bild von f.

c. Berechne ein Basis D von $\mathbb{R}^2$, so daß $M_D^D(f)$ in Normalform bezüglich Äquivalenz ist.

d. Zeige, daß $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist, und bestimme eine Basis von U.

Aufgabe 34: Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^t \mapsto (x - y + z, 2x + y)^t$$

sowie die Basen $B = ((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,-1)^t)$ von $\mathbb{R}^3$ und $D = ((2,1)^t, (1,1)^t)$ von $\mathbb{R}^2$. Ferner bezeichnen E und F die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

a. Bestimmte $M_F^E(f)$.

b. Bestimme $M_D^B(f)$ sowie die Transformationsmatrizen T_E^B und T_D^F mit

$$T_D^F \cdot M_F^E(f) \cdot T_E^B = M_D^B(f).$$

Aufgabe 35: Es seien $U = \operatorname{Lin}\big((1,1,0)^t, (1,0,2)^t\big)$ und $U' = \operatorname{Lin}\big((2,1,2)^t, (1,1,1)^t\big)$ zwei Unterräume des $\mathbb{R}^3$ und ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

a. Bestimme Gleichungen für die Unterräume U und U'.

b. Berechne eine Basis von $U \cap U'$.

c. Zeige, daß $\operatorname{Ker}(f_A) = U \cap U'$ gilt.

Aufgabe 36:

a. Betrachte die Permutationen

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_7$$

(a) Berechne $\sigma \circ \pi, \pi \circ \sigma, \sigma^{-1}$ und π^{-1}.

(b) Bestimme für jede der Permutationen aus a. die Zyklenzerlegung und das Signum.

(c) Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

(d) Schreibe π^{-1} als ein Produkt von Transpositionen aufeinanderfolgender Zahlen.

b. Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$