Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2019, Blatt 10

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 19.12.2019, 10:00

Aufgabe 37: Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{F}_5) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

a. Berechne die Determinante von A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

b. Berechne die Determinante von B mit Hilfe des Determinantenentwicklungssatzes.

Aufgabe 38: Es sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$A_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

und $d_{\lambda,n} = \det(A_{\lambda,n})$.

a. Leite eine Rekursionsformel für $d_{\lambda,n}$ her, d.h. stelle $d_{\lambda,n}$ mit Hilfe der $d_{\lambda,k}$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ dar.

b. Zeige mittels Induktion nach n, daß $d_{1,3\cdot n+2} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 39:

a. Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, K)$ mit $m > n$ gilt $\det(AB) = 0$.

b. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ und $A^t = -A$. Zeige, A ist nicht invertierbar. Bleibt die Aussage wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen anderen Körper ersetzen?

Aufgabe 40:

a. Zerlege das Polynom $t^4 - 4t^3 - 3t^2 - 8t - 10 \in \mathbb{R}[t]$ in Primfaktoren.

b. Bestimme das Minimalpolynom von $b = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ in $\mathbb{Q}[t]$.

c. Zeige, ist $f \in \mathbb{R}[t]$ irreduzibel, so ist $\deg(f) \in \{1, 2\}$.

Hinweis zu Teil c., betrachte für eine komplexe Nullstelle λ von f die Fälle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. In letzterem Fall zeige, daß auch das konjugiert Komplexe von λ eine Nullstelle von f ist und betrachte dann das Polynom $g = (t - \lambda) \cdot \left(t - \overline{\lambda}\right)$.