Thomas Markwig

# Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 9.1.2020, 10:00

**Aufgabe 41:** Es sei $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ der $K$-Vektorraum der $2 \times 2$-Matrizen über $K$. Ferner sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ gegeben und wir betrachten den Endomorphismus

$$T_A : V \longrightarrow V : X \mapsto A \circ X.$$

a. Zeige, genau dann ist $\det(A) \neq 0$, wenn $\det(T_A) \neq 0$.

b. Zeige, $\mathrm{Spur}(T_A) = 2 \cdot \mathrm{Spur}(A)$.

**Aufgabe 42:**

a. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und überprüfe $A$ auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

b. Es sei $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis von $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{11})$ und $T = E_{12}+E_{21}+E_{22} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_{11})$. Prüfe den Endomorphismus $f : V \to V : A \mapsto T\circ A+A\circ T^{-1}$ auf Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit.

**Aufgabe 43:**

a. Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und es seien $x_1, \ldots, x_r \in V$ Eigenvektoren von $f$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, dann ist die Familie $(x_1, \ldots, x_r)$ linear unabhängig.

b. Zeige, $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, wenn $\lambda$ ein Eigenwert von $A^t$ ist.

**Aufgabe 44:** Es sei $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ eine Matrix vom Rang $\mathrm{rang}(A) = 1$. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a. $t^2$ ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_A$ von $A$.

b. $A$ ist diagonalisierbar.

c. $\mathrm{Spur}(A)$ ist ein Eigenwert von $A$.