Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2019, Blatt 12

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 16.1.2020, 10:00

Aufgabe 45: Es sei $E = (e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^n$, $\sigma = (1\ 2\ \ldots\ n) \in \mathbb{S}_n$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeige, daß f diagonalisierbar ist.

Hinweis, stelle die Matrixdarstellung von f auf und berechne das charakteristische Polynom.

Aufgabe 46:

a. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für die Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{Q}).$$

b. Sei $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die kanonische Basis des $\mathbb{F}_{11}$-Vektorraums $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_{11})$ und $C = 2 \cdot E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_{11})$. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Jordanbasis für den Endomorphismus

$$f : V \to V : A \mapsto C \circ A + A \circ C.$$

Aufgabe 47:

a. Welche Jordansche Normalform kommt für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{C})$ in Frage, wenn $A^4 + 12A^2 = 6A^3 + 8A$ und $\mathrm{rang}(A) = 2 \cdot \mathrm{rang}(A - 2 \cdot \mathbb{1}_4) = 4$?

b. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum P_n der Polynome vom Grad höchstens n sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : P_n \longrightarrow P_n : p \mapsto p(t+1)$ und bestimme deren Jordansche Normalform.

Aufgabe 48: Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$ und $\dim_K(V) = n \geq 1$.

a. Bestimme den Rang und die Eigenwerte von f.

b. Bestimme das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von f.

c. Bestimme die Jordansche Normalform von f.