Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 23.1.2020, 10:00

Aufgabe 49:

a. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}).$$

b. Bestimme die Jordansche Normalform und die zugehörige Transformationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_7(\mathbb{Q}).$$

c. Berechne mit Hilfe der Jordanschen Normalform die Matrix A^{100} für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 50: Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$U := \{(v, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 \mid v + w + x + y + z = 0\}$$

bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 51: Für $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ definieren wir $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^t \circ B)$.

a. Zeige, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V.

b. Zeige, für $U = \{A \in V | A^t = A\}$ gilt $U^\perp = \{A \in V | A^t = -A\}$.

Aufgabe 52: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum.

a. Zeige die Parallelogrammgleichung $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2 \cdot (||x||^2 + ||y||^2)$ gilt.

b. Zeige, ist π_U die orthogonale Projektion auf einen Unterraum U von V und ist $(x_1, \ldots, x_r)$ eine ONB von U, dann gilt für $x \in V$

$$\pi_U(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x_i, x \rangle \cdot x_i.$$