Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Donnerstag, 30.1.2020, 10:00

Aufgabe 53: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Für jedes $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ gibt es genau ein $y \in V$ mit $g(x) = \langle y, x \rangle$ für alle $x \in V$.

Hinweis: überlege mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung, wie y zu gegebenem g aussehen muß.

Aufgabe 54: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ normal, so gelten $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^*)$ und $V = \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.

Aufgabe 55: Es sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ so, daß es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^m = \mathrm{id}_V$. Zeige, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a. f ist unitär.

b. f ist normal.

c. Für Eigenwerte $\lambda \neq \mu$ von f gilt $\mathrm{Eig}(f, \lambda) \perp \mathrm{Eig}(f, \mu)$.

Aufgabe 56: Zeige, daß die folgende Matrix A normal ist und bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, die sie diagonalisiert:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$