Fachbereich Mathematik

Wintersemester 2019, Blatt 15

Thomas Markwig

Lineare Algebra 1 / Mathematik für Physiker 2

Die Aufgaben brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in den Übungen der ersten Vorlesungswoche des Sommersemesters besprochen.

Aufgabe 57: Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$U := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Aufgabe 58: Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum und $\in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
Zeige, wenn für $x \in V$ stets $||f(x)|| = ||x||$ gilt, so ist f orthogonal bzw. unitär.

Aufgabe 59: Überprüfe, ob die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ positiv definit ist:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 60: Es sei $\sigma \in \mathbb{S}_n$ ein n-Zykel, $E = (e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^n$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ der eindeutig bestimmte Endomorphismus mit $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir betrachten $\mathbb{C}^n$ als unitären Raum mit dem kanonischen Skalarprodukt. Zeige die folgenden Aussagen:

a. f ist unitär.

b. $\chi_f = t^n - 1$ und die Eigenwerte von f sind die n-ten Einheitswurzeln.

c. Bestimme eine ONB B, so daß $M_B^B(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweise: man schaue sich zunächst die Fälle $n = 2, 3, 4$ an. Für den allgemeinen Fall betrachte man in Teil c. den Vektor $b_k = \sum_{j=1}^n \xi^{(1-k)\cdot(j-1)} \cdot e_{\sigma^{j-1}(1)}$ mit $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Teil b. wurde eigentlich schon im Zusammenhang mit Aufgabe 45 gelöst.