Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2020
Blatt 1

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 30.04.2020, 10:00

Aufgabe 1: Wir betrachten die Abbildung

$$b : K^2 \times K^2 \to K : \big((x_1,x_2)^t,(y_1,y_2)^t\big) \mapsto 2\cdot x_1\cdot y_1 + x_1\cdot y_2 + y_1\cdot x_2 - x_2\cdot y_2.$$

Zudem bezeichne $E = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des K^2 und $B = (x_1, x_2)$ mit $x_1 = (1,1)^t$ und $x_2 = (1,-1)^t$ sei eine weitere Basis.
Zeige, daß b eine symmetrische Bilinearform ist und berechne die Matrixdarstellungen $M_E(b)$ und $M_B(b)$ sowie die Transformationsmatrix T_E^B mit

$$M_B(b) = \left(T_E^B\right)^t \cdot M_E(b)\cdot T_E^B.$$

Aufgabe 2: Sei $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$.

(a) Zeige, es gibt eine symmetrische Bilinearform $b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$ und eine schiefsymmetrische Bilinearform $b'' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$, so daß $b = b' + b''$.

(b) Zeige, die Bilinearformen b' und b'' in a. sind eindeutig bestimmt.

Anmerkung, b heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $b(x,y) = -b(y,x)$ für alle $x,y \in V$.

Aufgabe 3: Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix ist, d.h. die Spalten von T sind eine Orthognalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich b_A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Wir betrachten die Bilinearform

$$b_A : K^2 \times K^2 \longrightarrow K,$$

die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Beweise oder widerlege, daß es zwei lineare Abbildungen $f, g : K^2 \longrightarrow K$ gibt, so daß für alle $x, y \in K^2$ die Gleichung gilt:

$$b_A(x,y) = f(x)\cdot g(y).$$