Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2020
Blatt 2

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 14.05.2020, 10:00

Aufgabe 5: Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ mit Hilfe des symmetrischen Gaußalgorithmus' eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_5(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang von A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: Zeige, sind $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen mit $x^tAx \leq x^tBx$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist der Trägheitsindex von A kleiner oder gleich dem Trägheitsindex von B.

Aufgabe 7: Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei bilinear und symmetrisch, so daß es kein $0 \neq x \in V$ mit $b(x, y) = 0$ für alle $y \in V$ gibt. Zeige, wenn U ein Unterraum von V mit $b(x, y) = 0$ für alle $x, y \in U$ ist, dann gilt $2 \cdot \dim_{\mathbb{R}}(U) \leq \dim_{\mathbb{R}}(V)$.

Aufgabe 8: Wir bezeichnen mit e_i den i-ten Einheitsvektor im K^m, $i = 1, \ldots, m$ und mit f_j den j-ten Einheitsvektor im K^n, $j = 1, \ldots, n$. Ferner bezeichne $E_i^j \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ die Matrix mit einer Eins an Position (i, j) als einzigem Nicht-Null-Eintrag.

(a) Zeige, daß es genau eine bilineare Abbildung

$$b : K^m \times K^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, K)$$

gibt mit

$$b(e_i, f_j) = E_i^j$$

für alle $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Sei W ein K-Vektorraum und sei

$$c : K^m \times K^n \longrightarrow W$$

eine bilineare Abbildung. Zeige, dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Mat}(m \times n, K) \longrightarrow W,$$

so daß $f \circ b = c$ gilt.