Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 28.05.2020, 10:00

Aufgabe 9: Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ seien zwei Unterräume von V. Zeige:

(a) $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^\circ = U_1^\circ + U_2^\circ$.

Aufgabe 10: Zeige, daß die Familie

$$B = \big((2,2,2,1)^t, (0,1,0,0)^t, (1,2,3,0)^t, (1,0,0,1)^t\big)$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und bestimme die duale Basis B^* als Vektoren in $\mathrm{Mat}(1 \times 4, \mathbb{R})$.

Aufgabe 11: Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wir definieren eine Abbildung

$$i : (V/U)^* \to V^* : g \mapsto \big(V \to K : v \mapsto g(v + U)\big).$$

Zeige, i ist ein Monomorphismus mit $\mathrm{Im}(i) = U^\circ$.

Aufgabe 12: Es sei V ein K-Vektorraum.

(a) Zeige, ist $W \subseteq V^*$ ein Unterraum von V^*, dann ist

$$W^\circledcirc = \big\{x \in V \;\big|\; \langle g, x\rangle = 0 \;\forall\, g \in W\big\}$$

ein Unterraum von V.

(b) Zeige, ist $L(V)$ die Menge aller Unterräume des endlich-dimensionalen Vektorraums V und $L(V^*)$ die Menge aller Unterräume von V^*, dann sind

$$\circ : L(V) \longrightarrow L(V^*) : U \mapsto U^\circ$$

und

$$\circledcirc : L(V^*) \longrightarrow L(V) : W \mapsto W^\circledcirc$$

bijektiv und zueinander invers. Zudem folgt aus $U \subseteq \widetilde{U}$ und $W \subseteq \widetilde{W}$

$$U^\circ \supseteq \widetilde{U}^\circ$$

und

$$W^\circledcirc \supseteq \widetilde{W}^\circledcirc.$$