Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 02.07.2020, 10:00

Aufgabe 17:

(a) Bestimme den Rang des Tensors

$$(1,1,1)^t \otimes (1,2,3)^t + (1,0,1)^t \otimes (1,1,1)^t + (0,1,1)^t \otimes (2,1,0)^t \in \mathbb{F}_5^3 \otimes \mathbb{F}_5^3.$$

(b) Interpretiere den Vektorraum $\mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$ als Tensorprodukt $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^3$ und schreibe den Tensor

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 31 & 8 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

als minimale Summe reiner Tensoren.

(c) Berechne die Dehninvariante des gleichseitigen Tetraeders.

Aufgabe 18: Es seien $A, C \in \mathrm{Mat}_m(K)$ und $B, D \in \mathrm{Mat}_n(K)$ quadratische Matrizen.

(a) Zeige, $(A \circ C) \otimes (B \circ D) = (A \otimes B) \circ (C \otimes D)$.

(b) Zeige, $\det(A \otimes B) = \det(A)^n \cdot \det(B)^m$

Aufgabe 19: Seien U, V und W drei K-Vektorräume. Zeige, es gibt genau einen Isomorphismus

$$\varphi : \mathrm{Hom}_K(U, V) \otimes_K W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U, V \otimes_K W),$$

so daß

$$\varphi(f \otimes w) : U \longrightarrow V \otimes_K W : u \mapsto f(u) \otimes w$$

für alle $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $w \in W$ gilt.

Aufgabe 20: Seien V und W zwei K-Vektorräume der Dimensionen $\dim_K(V) = m$ und $\dim_K(W) = n$ und seien $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $g \in \mathrm{End}_K(W)$ zwei Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_m)$$

und

$$\chi_g = (t - \mu_1) \cdot \ldots \cdot (t - \mu_n).$$

Bestimme das charakteristische Polynom von $f \otimes g \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K W)$.